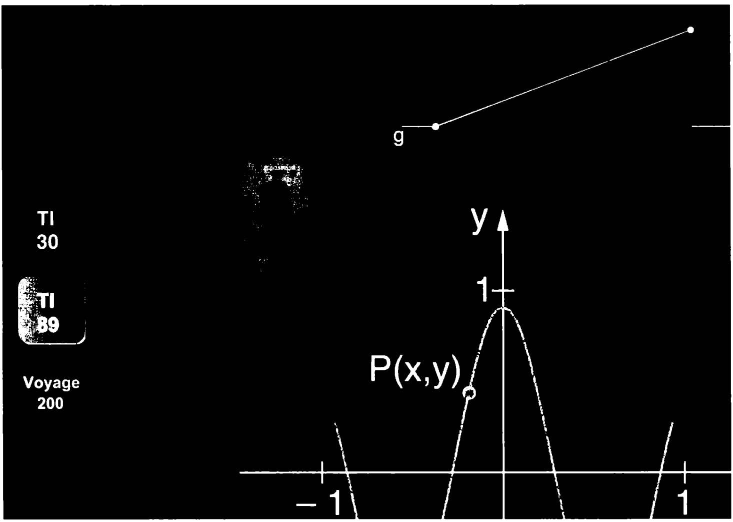
Ingenieur-Mathematik 1



Durchgerechnete Lösungen

E. DORNER

Inhalt

Erstellt von Hans Siedler

4. Auflage, 2011

Anregungen zur Verbesserung erbeten an
wolfgang.timischl@schule.at oder gerald.kaiser@iinode.at

Buch-Nr. 120 710
Hans Siedler, Wofgang Timischl **Ingenieur-Mathematik 1** **Durchgerechnete Lösungen**
© 2004 Verlag E. DORNER GmbH Ungargasse 35, 1030 Wien Tel.: 01 / 533 56 36, Fax: 01 / 533 56 36-15 E-Mail: office@dorner-verlag.at www.dorner-verlag.at
ISBN 978-3-7055-**0632**-9

1 Erste Schritte

1.1

a) $x+1=3 \quad |-1$
$x=2 \quad \text{Pr.}: 3=3$

b) $x-2=5 \quad |+2$
$x=7 \quad \text{Pr.}: 5=5$

c) $2x=5 \quad |:2$
$x=\frac{5}{2} \quad \text{Pr.}: 5=5$

d) $\frac{x}{2}=1 \quad |\cdot 2$
$x=2 \quad \text{Pr.}: 1=1$

e) $3x+1=0 \quad |-1$
$3x=-1 \quad |:3$
$x=-\frac{1}{3} \quad \text{Pr.}: 0=0$

f) $\frac{x}{4}-1=0 \quad |+1$
$\frac{x}{4}=1 \quad |\cdot 4$
$x=4 \quad \text{Pr.}: 0=0$

g) $\frac{3x}{4}=\frac{1}{2} \quad |\cdot 4$
$3x=2 \quad |:3$
$x=\frac{2}{3} \quad \text{Pr.}: \frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

h) $\frac{2x}{5}-\frac{1}{2}=0 \quad |+\frac{1}{2}$
$\frac{2x}{5}=\frac{1}{2} \quad |\cdot\frac{5}{2}$
$x=\frac{5}{4} \quad \text{Pr.}: 0=0$

1.2

a) $4x=0 \quad |:4c$
$x=0$
$\text{Pr.}: 0=0$

b) $\frac{a}{5}=2 \quad |\cdot 5$
$a=10$
$\text{Pr.}: 2=2$

c) $\frac{2m}{5}=0 \quad |\cdot 5$
$2m=0 \quad |:2$
$m=0 \quad \text{Pr.}: 0=0$

d) $\frac{1}{5}=2k \quad |\cdot 5$
$1=10k \quad |:10$
$k=\frac{1}{10} \quad \text{Pr.}: \frac{1}{5}=\frac{1}{5}$

e) $0{,}3\cdot n=0{,}4 \quad |\cdot 10$
$3n=4 \quad |:3$
$n=\frac{4}{3} \quad \text{Pr.}: 0{,}4=0{,}4$

f) $\frac{e}{2}=0{,}1 \quad |\cdot 2$
$e=0{,}2$
$\text{Pr.}: 0{,}1=0{,}1$

g) $\frac{s}{5}-0{,}2=0 \quad |\cdot 5$
$s-1=0$
$s=1 \quad \text{Pr.}: 0=0$

h) $\frac{p}{0{,}1}-0{,}2=0$
$\frac{p}{0{,}1}=0{,}2 \quad |\cdot 0{,}1$
$p=0{,}02 \quad \text{Pr.}: 0=0$

1.3

a) $3c-4=2c \quad |+4-2c$
$c=4 \quad \text{Pr.}: 8=8$

b) $\frac{u}{2}-1=2u \quad |\cdot 2$
$u-2=4u \quad |-4u$
$-3u=2 \quad |:(-3)$
$u=-\frac{2}{3} \quad \text{Pr.}: -\frac{4}{3}=-\frac{4}{3}$

c) $2v+3=-v+2 \quad |:+v-3$
$3v=-1$
$v=-\frac{1}{3} \quad \text{Pr.}: \frac{7}{3}=\frac{7}{3}$

d) $-4a+0{,}5=a+2 \quad |-a-0{,}5$
$-5a=1{,}5 \quad |:(-5)$
$a=-0{,}3 \quad \text{Pr.}: 1{,}7=1{,}7$

e) $0{,}1\cdot b+2=b+0{,}2 \quad |-b-2$
$-0{,}9b=-1{,}8 \quad |:(-0{,}9)$
$b=2 \quad \text{Pr.}: 2{,}2=2{,}2$

f) $\frac{c}{3}-1=2c-11 \quad |\cdot 3$
$c-3=6c-33 \quad |-6c+3$
$-5c=-30 \quad |:(-5)$
$c=6 \quad \text{Pr.}: 1=1$

1.4

a) $2+x=3\cdot(2-x)$
$2+x=6-3x$
$4x=4 \quad \text{Pr.}: 2+1=3\cdot 1$
$x=1 \qquad 3=3$

b) $4y-(1+y)=0$
$4y-1-y=0$
$3y=1 \quad \text{Pr.}: \frac{4}{3}-\frac{4}{3}=0$
$y=\frac{1}{3} \qquad 0=0$

c) $2\cdot(1-4x)=-(1+2x)$
$2-8x=-1-2x$
$3=6x \quad \text{Pr.}: 2\cdot(-1)=-2$
$x=\frac{1}{2} \qquad -2=-2$

d) $k+2\cdot(1-3k)=2-k$
$k+2-6k=2-k$
$-4k=0$
$k=0 \quad \text{Pr.}: 2\cdot(-1)=-2$
$-2=-2$

e) $1-(c+1)=2-3c$
$1-c-1=2-3c$
$2c=2$
$c=1 \quad \text{Pr.}: 1-2=2-3$
$-1=-1$

f) $0{,}1\cdot(d+3)=0{,}02+0{,}3d$
$0{,}1d+0{,}3=0{,}02+0{,}3d$
$-0{,}2d=-0{,}28 \rightarrow d=1{,}4$
$\text{Pr.}: 0{,}1\cdot 4{,}4=0{,}02+0{,}42$
$0{,}44=0{,}44$

1.5 a) $\frac{r}{0,1}-3=0,2+2r \quad |$
$10r-3=0,2+2r \quad |-2r+3$
$8r=3,2 \quad |:8$
$r=0,4 \quad$ Pr.: $4-3=0,2+0,8$
$1=1$

b) $0,5\cdot d+\frac{1}{2}=2d \quad |\cdot 2$
$d+1=4d \quad |-3d-1$
$-3d=-1 \quad |:(-2)$
$d=\frac{1}{3} \quad$ Pr.: $\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$
$\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

c) $\frac{k}{2}=\frac{4-k}{3} \quad |\cdot 6$
$3k=8-2k \quad |+2k$
$5k=8 \quad |:5$
$k=\frac{8}{5} \quad$ Pr.: $\frac{4}{5}=\frac{\frac{12}{5}}{3}$
$\frac{4}{5}=\frac{4}{5}$

d) $\frac{m+4}{3}=3m \quad |\cdot 3$
$m+4=9m \quad |-m-4$
$4=8m$
$m=\frac{1}{2} \quad$ Pr.: $\frac{\frac{1}{2}+4}{3}=\frac{3}{2}$
$\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

e) $a-2=\frac{a}{2}+0,5 \quad |\cdot 2$
$2a-4=a+1 \quad |-a+4$
$a=5 \quad$ Pr.: $5-2=\frac{5}{2}+0,5$
$3=3$

f) $\left(\frac{w}{0,3}-4\right)\cdot 0,1=\frac{w}{7}$
$\frac{w}{3}-0,4=\frac{w}{7} \quad |\cdot 21$
$7w-8,4=3w \quad |-3w+8,4$
$4w=8,4$
$w=2,1 \quad$ Pr.: $(7-4)\cdot 0,1=0,3$
$0,3=0,3$

1.6 $v=\frac{s}{t}; \quad t=\frac{s}{v}$

1.7 $R=\frac{U}{I}; \quad I=\frac{U}{R}$

1.8 $U=\frac{W}{I\cdot t}; \quad t=\frac{W}{U\cdot I}$

1.9 $F=p\cdot A$

1.10 $h=\frac{2\cdot A}{g}$

1.11 $R=\frac{U^2}{P}$

1.12 $m=\frac{2\cdot W}{v^2}$

1.13 $T=\frac{2\pi}{\omega}$

1.14 $C=\frac{2\cdot W}{U^2}$

1.15 $A=\frac{d\cdot C}{\varepsilon}; \quad d=\frac{A\cdot\varepsilon}{C}$

1.16 $a=2m-c; \quad c=2m-a$

1.17 $m=\frac{5I}{2r^2}$

1.18 $h=\frac{3V}{\pi\cdot r^2}$

1.19 $a=\frac{4A\cdot r}{b\cdot c}; \quad A=\frac{a\cdot b\cdot c}{4r}$

1.20 $a=\frac{2h}{\sqrt{3}}=\frac{2\cdot\sqrt{3}}{3}\cdot h$

1.21 $V_2=\frac{p_1\cdot V_1}{p_2}; \quad p_2=\frac{p_1\cdot V_1}{V_2}$

1.22 $I_2=\frac{I_1\cdot R_1}{R_2}; \quad R_1=\frac{I_2\cdot R_2}{I_1}$

1.23 $a=\frac{u}{2}-b; \quad b=\frac{u}{2}-a$

1.24 $v_0=v-a\cdot t; \quad a=\frac{v-v_0}{t}$

1.25 $F=\frac{9}{5}\cdot C+32$

1.26 $h=\frac{2\cdot A}{a+c}; \quad a=\frac{2\cdot A}{h}-c$

1.27 $h=\frac{O}{2\pi\cdot r}-r=\frac{O-2\pi\cdot r^2}{2\pi\cdot r}$

1.28 $A=\frac{\rho}{2}\cdot(a+b+c); \quad b=\frac{2A}{\rho}-(a+c)$

1.29 $U_L=U_K+I\cdot R_i; \quad I=\frac{U_L-U_K}{R_i}$

1.30 $s=v_0\cdot t+\frac{a}{2}\cdot t^2$
$s-\frac{a}{2}\cdot t^2=v_0\cdot t$
$v_0\cdot t=\frac{2s-a\cdot t^2}{2}$
$v_0=\frac{2s-a\cdot t^2}{2\cdot t}$
$\frac{a}{2}\cdot t^2=s-v_0\cdot t$
$a=\frac{2\cdot(s-v_0\cdot t)}{t^2}$

1.31 $i=\frac{R-r}{2R}$
$2R\cdot i=R-r$
$r=R-2R\cdot i$
$r=R\cdot(1-2i)$
$R=\frac{r}{1-2i}$

1.32 $r=\frac{x}{x_0}-1$
$\frac{x}{x_0}=r+1$
$x=x_0\cdot(r+1)$
$x_0=\frac{x}{r+1}$

1.33 $f_1=f_0\cdot\frac{c}{c-v_0}$
$c-v_0=\frac{f_0\cdot c}{f_1}$
$v_0=c-\frac{f_0\cdot c}{f_1}$
$v_0=c\cdot\left(1-\frac{f_0}{f_1}\right)$
$c=\frac{f_1\cdot v_0}{f_1-v_0}$

2 Zahlen und Variable

2.1 a) keine Aussage b) Aussage c) Aussage
d) keine Aussage e) keine Aussage f) keine Aussage

2.2 a) nein b) ja c) ja d) nein

2.3 a) Wenn die Ampel rot oder gelb zeigt, ist anzuhalten.
b) Betreten des Rasens oder Blumenpflücken ist verboten.

2.4 a) nein b) nein c) nein d) nein

2.5 a) Es ist nicht kalt.
b) Es gab jemanden, der das Problem lösen konnte.
c) Bernd ist nicht der Größte in der Klasse.
d) Es gibt mindestens einen Schüler, der nicht teilnimmt.
e) Es gibt Sportler, die Raucher sind.
f) Er ist älter als 15 Jahre.
g) Es gibt einen Schüler, der krank ist.
h) Es gibt jemanden, der viel Alkohol trinkt und nicht dick ist.

2.6 Es lässt sich nicht sagen, wie Stefan heute in die Schule kommt.

2.7 Stefan kommt heute nicht mit dem Fahrrad in die Schule.

2.8 a) notwendig b) hinreichend c) notwendig und hinreichend
d) notwendig und hinreichend e) hinreichend

2.9 a) richtig b) falsch c) falsch d) richtig e) falsch f) falsch

2.10 Nein. Beispiel: Das Quadrat von -2, also $(-2)^2 = 4$, ist positiv, nicht aber -2.

2.11 a) Falsch. Es könnte auch sein, dass ich nicht nur froh bin, wenn die Sonne scheint, sondern beispielsweise auch, wenn es schneit.
b) Falsch. Es wird nur gesagt, dass ich froh bin, wenn die Sonne scheint; zu allen anderen Wetterlagen gibt es keine Information. Es könnte durchaus sein, dass ich *auch* bei Regen froh bin (etwa nach einer langen Dürrezeit).
c) Wahr. Die Folgerung "Ich bin nicht froh" $\Rightarrow$ "die Sonne scheint nicht" ist *nur* dann falsch, wenn zutreffen könnte, dass ich nicht froh bin und die Sonne scheint. Die laut Angabe wahre Folgerung "die Sonne scheint" $\Rightarrow$ "ich bin froh" schließt aber gerade diesen Fall aus.

2.12 a) Falsch. Beispiel: Ein Paralleogramm besitzt im Allgemeinen nicht vier rechte Winkel. Trotzdem halbieren einander die Diagonalen.
b) Falsch. Beispiel: In einem Paralleogramm halbieren einander die beiden Diagonalen. Dieses Viereck beistzt aber im Allgemeinen trotzdem nicht vier rechte Winkel.
c) Wahr

2.13

P	Q	P XOR Q
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

2.14 a) A ={2, 3, 4} b) B = {−1, 0, 1, 2, 3, 4} c) C = {0, 1, 2}
d) D = {−2, −1, 0, 1, 2, 3} e) E = {−4, −3, −2, −1} f) F = {−3, −2}
g) G = {1, 2, 3} h) H = {5, 6}

2.15 a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3 < x < 7\}$ b) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \le x \le 1\}$ c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \ge 5\}$
d) $D = \mathbb{N}$ e) $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \le -1\}$ f) $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \le x \le 3\}$

2.16 a) wahr b) wahr c) wahr d) falsch e) wahr

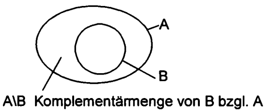
2.17 a) $A \cup B = \{1,2,3,4\}$, $A \cap B = \{2\}$, $A \setminus B = \{1\}$, $B \setminus A = \{3,4\}$
b) $A \cup B = A$, $A \cap B = A$, $A \setminus B = \{\}$, $B \setminus A = \{\}$
c) $A \cup B = \{-3,-2,-1,0,1,2,3, \dots\}$, $A \cap B = \{0,1,2\}$, $A \setminus B = \{-3,-2,-1\}$, $B \setminus A = \{3,4,5, \dots\}$
d) $A \cup B = \{-1,0,1,2,3,4\}$, $A \cap B = \{\}$, $A \setminus B = A$, $B \setminus A = B$

2.18 a) $A \setminus B = \{1,2,5\}$ b) $A\setminus B = \{0, 2, 4, 6, 8, 9, 10\}$ c) $A \setminus B = \{0\}$ d) $A\setminus B = \{\}$

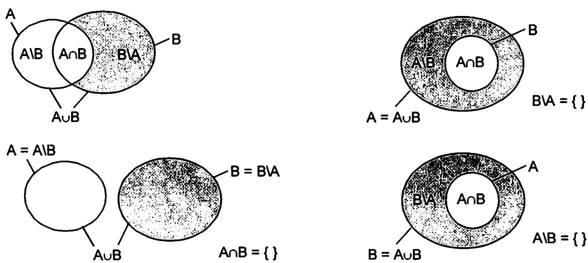
2.19 a) $\{1\}$ b) $\{0,1\}$ c) $\{0\}$ d) $\mathbb{N}$ e) $\mathbb{N}$
f) $\{\}$ g) $\{0\}$ h) $\mathbb{N}^*$ i) $\{0\}$ j) $\{0\}$

2.20 a) A b) A c) $\{\}$

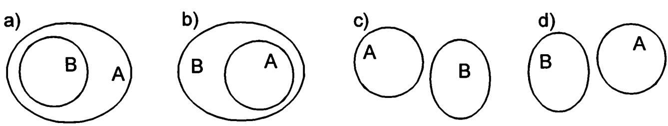
2.21



2.22



2.23



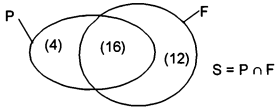
2.24

2.25 a) falsch b) wahr c) falsch d) wahr e) falsch f) wahr

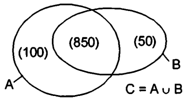
2.26 a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ b) $A \cup C = \{1, 2, 4, 5\}$ c) $B \cup C = \{2, 3, 4, 5\}$
d) $A \cap B = \{2\}$ e) $A \cap C = \{4\}$ f) $B \cap C = \{\}$
g) $A \setminus B = \{1, 4\}$ h) $(A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i) $(A \cap B) \cap C = \{\}$

2.27 a) A = {1, 2, 3, 4}; B = {4, 5}; C = {2, 3, 4} b) A = {4, 5}; B = {2, 3}; C = {1, 2, 4, 5}

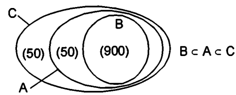
2.28 a) P\F; 4 Schüler
b) F\P; 12 Schüler
c) P ∩ F; 16 Schüler



2.29 *Mindestzahl*: 850 einwandfreie Bauelemente (nicht einwandfreie Bauelemente besitzen entweder *nur* eine fehlerhafte erste Komponente oder *nur* eine fehlerhafte zweite Komponente)



Höchstzahl: 900 einwandfreie Bauelemente (jedes Bauelement mit einwandfreier zweiter Komponente hat auch eine einwandfreie erste Komponente)



2.30 a) $2 \cdot 13$ b) $5^2 \cdot 7$ c) $2^3 \cdot 3^3$ d) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$ e) $2^4 \cdot 5 \cdot 11$
f) $2 \cdot 3^2 \cdot 7^2$ g) 2^{10} h) $2^5 \cdot 5^3$ i) $3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 11$ j) $41 \cdot 83$

2.31 a) 12, 24, 36, 48, 60, 72, ***84***, 96, ... ; 28, 56, ***84***, 112, ... ; d.h. *84* kleinstes gemeinsames Vielfaches
b) 52 c) 72 d) 756
e) 24, 48, 72, 96, 120, 144, ***168***, 192, ...; 56, 112, ***168***, 224, ... ; ***168***, 336, ... ; d.h. *168*
f) 60 g) 180 h) 19845

2.32 Werte in cm: 65, 130, ... , 910, ***975***, 1040, ... ; 75, 150, ... , 900, ***975***, 1050, ...; d.h. nach *975* cm

2.33 a) 4 b) 6 c) 36 d) 9 e) 6

2.34 a) 10^2 b) 10^3 c) 10^4 d) 10^6 e) 10^8

2.35 a) 2^2 b) 2^6 c) 2^9 d) 2^{10} e) 2^{12}

2.36 $2^8 = 256$ Papierlagen

2.37 a) 4 : 2 = 2, Rest 0; 4 mod 2 = 0 b) 5 : 2 = 2, Rest 1; 5 mod 2 = 1
c) 8 : 5 = 1, Rest 3; 8 mod 5 = 3 d) 40 : 7 = 5, Rest 5; 40 mod 7 = 5
e) 40 : 8 = 5, Rest 0; 40 mod 5 = 0

2.38 1000 : 60 = 16, Rest 40; 16 Stunden und 40 Minuten

2.39 3000 : (8·60) = 6 Rest 120; 120 : 8 = 15, Rest 0; d.h.: 6 Seiten, 15 Zeilen (vollgeschrieben)

2.40 a) $\boldsymbol{Q}$ b) $\boldsymbol{N}$ c) $\boldsymbol{Q}$ d) $\boldsymbol{Z}$ e) $\boldsymbol{R}$ f) $\boldsymbol{N}$

2.41 *a)* $\frac{4}{5} = 0{,}8$; $\frac{3}{8} = 0{,}375$; $\frac{11}{16} = 0{,}6875$ *b)* $-\frac{5}{9} = -0{,}\dot{5}$; $-\frac{1}{60} = -0{,}01\dot{6}$; $\frac{11}{12} = 0{,}91\dot{6}$

c) $\frac{112}{99} = 1{,}\overline{13}$; $\frac{5}{12} = 0{,}41\dot{6}$; $\frac{4}{11} = 0{,}\overline{36}$ *d)* $\frac{4}{27} = 0{,}\overline{148}$; $\frac{5}{24} = 0{,}208\dot{3}$; $\frac{7}{18} = 0{,}3\dot{8}$

e) $\frac{3}{7} = 0{,}\overline{428571}$; $\frac{3}{44} = 0{,}06\overline{81}$; $\frac{5}{28} = 0{,}17\overline{857142}$

f) $\frac{5}{7} = 0{,}\overline{714285}$; $\frac{10}{31} = 0{,}\overline{322\,580\,645\,161\,290}$; $\frac{3}{17} = 0{,}\overline{176\,470\,588\,235\,2941}$

2.42 *a)* $-4 < 0$ *b)* $-5 < -2$ *c)* $-2 < -1 < 0 < 14$ *d)* $-3 < -2 < 0 < 1$

2.43 *a)* $0 > -1$ *b)* $-1 > -2$ *c)* $1 > -1 > -3 > -4$ *d)* $4 > 3 > -3 > -4$

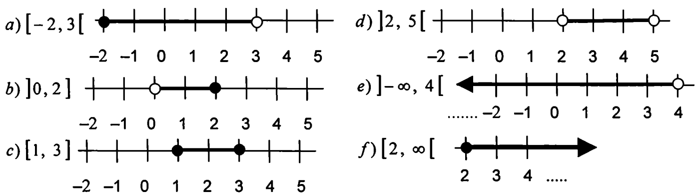
2.44 $a)\ ]-1,\ \infty[$ $\quad b)\ [0,\ \infty[$ $\quad c)\ ]-\infty,\ 0]$ $\quad d)\ ]-2,4]$

2.45 $a)\ 8$ $\quad b)\ 3$ $\quad c)\ 1$ $\quad d)\ -1$ $\quad e)\ 1$ $\quad f)\ 3$ $\quad g)\ 6$ $\quad h)\ 6$

2.46 a) wahr b) falsch c) falsch d) wahr e) falsch f) wahr
g) wahr h) falsch

2.47 a) falsch, wenn a negativ b) falsch für jede Zahl a
c) falsch, wenn a und b ungleiche Vorzeichen haben; z.B.: a = 4, b = -3
d) falsch, wenn etwa a = 1, b = 2

2.48 ● .... gehört zur Menge ; ○ .... gehört nicht zur Menge



2.49 $a)\ [0,3[$ $\quad b)\ [0,3[$ $\quad c)\ [1,\ 2]$ $\quad d)\ ]2,\ 2[=\{\}$
$e)\ [1,\ 5]$ $\quad f)\ ]1,\ 3[$ $\quad g)\ [-2,\ 3]$ $\quad c)\ [-2,\ 3]$

2.50 $a)\ 14{,}5$ $\quad b)\ 3{,}225$ $\quad c)\ 0{,}128$ $\quad d)\ 5{,}5$

2.51 $a)\ 3$ $\quad b)\ 1$ $\quad c)\ \frac{2}{3}$ $\quad d)\ 2$ $\quad e)\ 1$ $\quad f)\ 26$ $\quad g)\ 5$ $\quad h)\ 25$

2.52 a) wahr b) wahr c) wahr

2.53 $a)\ x+2$ $\quad b)\ \frac{x}{2}$ $\quad c)\ \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad d)\ x\cdot(x-2)$

2.54 a) $x+y$ $\quad$ b) $3\cdot(x+y)$ $\quad$ c) $|x-y|$ $\quad$ d) $(x-y)^2$ $\quad$ e) $\sqrt{x\cdot y}$

2.55 $a)\ 0$ $\quad b)\ 0$ $\quad c)\ 2a$

2.56 $a)\ 3$ $\quad b)\ -1$ $\quad c)\ 3$ $\quad d)\ 3$

2.57 $a)\ 5$ $\quad b)\ 10$ $\quad c)\ 9$ $\quad d)\ 15$

2.58 $a)\ \sum_{k=3}^{6} a_k$ $\quad b)\ \sum_{i=1}^{4} 3x_i$ $\quad c)\ \sum_{n=1}^{6}\frac{1}{n}$ $\quad d)\ \sum_{n=1}^{5} n^3$ $\quad e)\ \sum_{n=1}^{4} 2^n$ $\quad f)\ \sum_{n=1}^{4} 2\cdot 4^n$

2.59 $a)\ \sum_{n=1}^{5} n$ $\quad b)\ \sum_{n=1}^{5} n^2$

2.60 a) $\overline{x} = \frac{1}{5}\cdot(2+5+2+4+1) = \frac{14}{5} = 2{,}8$ $\quad$ b) $168{,}83\ldots$ cm ≈ 169 cm
c) $15{,}4°C \approx 15°C$ $\quad$ d) $3{,}01\ldots$ g $\approx 3{,}0$ g

2.61 a) $h = \dfrac{2}{\frac{1}{1}+\frac{1}{100}} = 1{,}980\ldots;\ g = \sqrt{1\cdot 100} = 10$ $\quad$ b) $h = \dfrac{2}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 2;\ g = \sqrt{2\cdot 2} = 2$

2.62 $a)\ 3\quad b)\ -5\quad c)\ 6\quad d)\ 10\quad e)\ -5{,}5\quad f)\ -5\quad g)\ -1\quad h)\ 3\quad i)\ -2\quad j)\ -2$

2.63 $a)\,9\quad b)-7\quad c)\,1\quad d)-5\quad e)-6\quad f)\,4\quad g)-3\quad h)-6\quad i)\,2\quad j)-3{,}1\quad k)-2{,}6\quad l)-6{,}7$

2.64 $a)-6\quad b)-6\quad c)\,20\quad d)\,0\quad e)\,2\quad f)\,0\quad g)-27\quad h)-1\quad i)\,12\quad j)\,4$

2.65 $a)-2\quad b)-2\quad c)\,2\quad d)\,0\quad e)\,0\quad f)-3\quad g)-4\quad h)\,2\quad i)\,2\quad j)\,4$

2.66 $a)\,15+2=17\quad b)\,2+15=17\quad c)\,8-6=2\quad d)\,24-2=22\quad e)\,12-22=-10$

$f)\,5-2=3\quad g)\,20+1=21\quad h)\,4+1=5\quad i)\,2-2=0\quad j)-20+\frac{5}{4}=-\frac{75}{4}=-18{,}75$

2.67 $a)\,5\cdot 9=45\quad b)\,15^2=225\quad c)\,18:18=1\quad d)\,9\cdot 9=81\quad e)\,9\cdot 9=81\quad f)\,12:2=6$

$g)\,8\cdot 4+2=34\quad h)\,2+30^2=2+900=902\quad i)\,18:9\cdot 2=2\cdot 2=4$

$j)\,200:2\cdot 100=100\cdot 100=10000$

2.68

$a)\ |-3-1|=|-4|=4$

$b)\ 2-|4-5|=2-|-1|=2-1=1$

$c)\ 8-3-|5|=8-3-|8-3|=8-3-5=0$

$d)\ 2\cdot|-3|-3\cdot|-2|=2\cdot 3-3\cdot 2=0$

$e)\ |-3+|-3||=|-3+3|=0$

$f)\ |-3-3|=|-6|=6$

$g)\ |-3-|1-3||=|-3-2|=|-5|=5$

$h)\ |3-2\cdot|4-1||=|3-2\cdot 3|=|3-6|=3$

2.69

$a)\ \frac{2}{5}+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{8+15+10}{20}=\frac{33}{20}$

$b)\ \frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{5-2}{10}=\frac{3}{10}$

$c)\ \frac{4}{3}-\frac{7}{5}+\frac{2}{5}+\frac{7}{12}=\frac{80-84+24+35}{60}=\frac{55}{60}=\frac{11}{12}$

$d)\ \frac{4}{7}+\frac{3}{5}-\frac{3}{4}=\frac{80+84-105}{140}=\frac{59}{140}$

$e)\ \frac{3}{4}-\frac{5}{12}+\frac{7}{18}-\frac{2}{9}=\frac{27-15+14-8}{36}=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$

$f)\ \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{30+20+15+12+10}{60}=$

$=\frac{87}{60}=\frac{29}{20}$

2.70 $a)\ \frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{5+4}{20}=\frac{9}{20}$

$b)\ \frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{180}=\frac{60+20+1}{180}=\frac{81}{180}=\frac{9}{20}\quad c)\ \equiv a)\quad d)\ \frac{1}{2}+\frac{1}{18}=\frac{9+1}{18}=\frac{10}{18}=\frac{5}{9}$

$e)\ \frac{1}{7}+\frac{1}{91}=\frac{13+1}{91}=\frac{14}{91}=\frac{2}{13}\qquad f)\ \frac{1}{3}+\frac{1}{11}+\frac{1}{231}=\frac{77+21+1}{231}=\frac{99}{231}=\frac{3}{7}$

2.71 $a)\ \sum_{i=1}^{4}\frac{1}{i}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{12+6+4+3}{12}=\frac{25}{12}$

$b)\ \sum_{k=0}^{3}\frac{1}{2k+1}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}=\frac{105+35+21+15}{105}=\frac{176}{105}$

$c)\ \sum_{j=1}^{4}\frac{1}{2j-1}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}=\frac{176}{105}$

$d)\ \sum_{n=1}^{4}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{12+6+4+3}{24}=\frac{25}{24}$

2.72 $a)\ 3\quad b)\ \frac{a}{4}\quad c)\ 3b\quad d)\ \frac{x}{2}\quad e)\ \frac{u}{6}\quad f)\ \frac{2r}{15}\quad g)\ \frac{a}{6}\quad h)\ \frac{c}{5}\quad i)\ \frac{3a\cdot c}{4}\quad j)\ c\cdot x$

2.73 a) $\frac{6}{11}:2=\frac{3}{11}$

b) $3:\frac{3}{2}=\frac{3\cdot 2}{3}=2$

c) $\frac{4}{3}:\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}=2$

d) $\frac{a}{9}:\frac{13}{12}=\frac{a}{9}\cdot\frac{12}{13}=\frac{4a}{39}$

e) $\frac{c}{3}:\frac{2}{5}=\frac{c}{3}\cdot\frac{5}{2}=\frac{5c}{6}$

f) $\left(\frac{4}{5}\right)^2:\frac{3}{4}=\frac{16}{25}\cdot\frac{4}{3}=\frac{64}{75}$

g) $\left(\frac{4}{5}:\frac{5}{3}\right)\cdot\frac{15}{4}=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{15}{4}=3$

h) $\frac{4}{3}:\left(\frac{5}{3}\cdot\frac{7}{12}\right)=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{7}=\frac{48}{35}$

2.74 a) $\frac{9}{5}$ b) $\frac{5}{7}$ c) $\frac{4}{9}$ d) $\frac{1}{10}$

2.75 a) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{5}}=\frac{2\cdot 5}{3\cdot 3}=\frac{10}{9}$

b) $\frac{\frac{2}{3}}{4}=\frac{2}{3\cdot 4}=\frac{1}{6}$

c) $\frac{2}{\frac{3}{4}}=\frac{2\cdot 4}{3}=\frac{8}{3}$

d) $\frac{\frac{4}{9}}{\frac{2}{9}}=\frac{4\cdot 9}{2\cdot 9}=2$

e) $\frac{7}{\frac{1}{7}}=\frac{7\cdot 7}{1}=49$

2.76 a) $\frac{1}{10}\cdot 2\,m=\frac{1}{5}m=0{,}2\,m$

b) $\frac{1}{3}\cdot 120\,m=60\,m$

c) $\frac{2}{3}\cdot 3\,km=2\,km$

d) $\frac{1}{15}\cdot 300\,Euro=20\,Euro$

e) $\frac{3}{5}\cdot 4=\frac{12}{5}=2{,}4$

f) $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

g) $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

h) $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{10}$

2.77 a) $-3x=0$
$x=0$

b) $\frac{x}{2}=0$
$\frac{1}{2}\cdot x=0$
$x=0$

c) $3\cdot(x-1)=0$
$x-1=0$
$x=1$

d) $2x\cdot(x+2)=0$
$x_1=0;\, x_2=-2$

e) $x^2-x=0$
$x\cdot(x-1)=0$
$x_1=0;\, x_2=1$

f) $2x^2+x=0$
$x\cdot(2x+1)=0$
$x_1=0;\, x_2=-\frac{1}{2}$

g) $3x^2=2x$
$x\cdot(3x-2)=0$
$x_1=0$
$3x=2;\, x_2=\frac{2}{3}$

h) $x^2+3x=4x^2$
$3x=3x^2$
$3x\cdot(1-x)=0$
$x_1=0;\; x_2=1$

2.78 a) $30x$ b) 0 c) $-k$ d) $8x+y$ e) $4s$ f) $4u$ g) $a-4b-c$ h) $4x-4y+4z$
i) $u-6v$ j) $m+2n$

2.79 a) a b) $a+a=2a$ c) $a-a=0$ d) $a+a=2a$ e) $-a-a=-2a$

2.80 a) $-a$ b) $a-a=0$ c) $a-(-a)=2a$ d) $a+(-a)=0$ e) $-a-(-a)=0$

2.81 a) 0 b) 1

2.82 a) $-x+2y$ b) 0 c) $-2u+v$ d) $-2s$ e) x f) $p+5$

2.83 a) $1-(a+b)$ b) $a-(-x+y)$ c) $r-(s-t)$ d) $a+1-(x-y)$ e) $2u-5v-(-w+1)$

2.84 a) $-4x-4y$ b) $-m\cdot n-m^2+n^2$ c) $-6a+2a^2+2a^3$ d) $-x^3+x^2$

2.85 a) $7x+3y$ b) $-x\cdot v$ c) $6d-11$ d) $3b+c$ e) 0
f) $-4x\cdot y+4x+x\cdot y-y+2x+2x\cdot y=6x-y-x\cdot y$

2.86 a) $3u-\{v-[w-(4u-5v)+u]-2w\}=3u-\{v-[w-4u+5v+u]-2w\}=$
$=3u-\{v-[w-3u+5v]-2w\}=3u-\{v-w+3u-5v-2w\}=$
$=3u-\{3u-4v-3w\}=3u-3u+4v+3w=4v+3w$

b) $12a-5b-\{5c+2b+3\cdot[-2a+7c-(3b-2a)-4\cdot(-a+2b)]\}=$
$=12a-5b-\{5c+2b+3\cdot[-2a+7c-3b+2a+4a-8b]\}=$
$=12a-5b-\{5c+2b+3\cdot[4a-11b+7c]\}=12a-5b-\{5c+2b+12a-33b+21c\}=$
$=12a-5b-\{12a-31b+26c\}=12a-5b-12a+31b-26c=26b-26c=26\cdot(b-c)$

c) $3x\cdot(2y-x)-\{(-x)\cdot[4y-(y-3x)]-3y\cdot[(x-2y)-(x-3y)]\}=$
$=6x\cdot y-3x^2-\{(-x)\cdot[4y-y+3x)]-3y\cdot[x-2y-x+3y]\}=$
$=6x\cdot y-3x^2-\{(-x)\cdot[3y+3x)]-3y\cdot[y]\}=6x\cdot y-3x^2-\{-3x\cdot y-3x^2-3y^2\}=$
$=6x\cdot y-3x^2+3x\cdot y+3x^2+3y^2=9x\cdot y+3y^2=3y\cdot(3x+y)$

d) $2\cdot(2m-n)-\{2n\cdot(3m-2n)-m\cdot[(4m-n)-2\cdot(2m+n)]-3m\cdot n\}=$
$=4m-2n-\{6m\cdot n-4n^2-m\cdot[4m-n-4m-2n]-3m\cdot n\}=$
$=4m-2n-\{6m\cdot n-4n^2-m\cdot[-3n]-3m\cdot n\}=$
$=4m-2n-\{6m\cdot n-4n^2+3m\cdot n-3m\cdot n\}=4m-2n-\{6m\cdot n-4n^2\}=$
$=4m-2n-6m\cdot n+4n^2$

2.87 a) $3x\cdot y-x\cdot y=2x\cdot y$ b) $2a\cdot b-2a\cdot b=0$
c) $2u\cdot v\cdot w$ d) $9x\cdot y-3x\cdot y=6x\cdot y$
e) $-a\cdot r+a\cdot s+a\cdot t-(a\cdot s+a\cdot t-a\cdot r)=0$
f) $p-2p^2-(-3p^2+p)-(p^2-p)=p-2p^2+3p^2-p-p^2+p=p$

2.88 a) $a\cdot b+4a+2b+8$ b) $u\cdot v-u-3v+3$ c) $49r^2-7r\cdot s-7r+s$
d) $a^2-a\cdot c-b^2+b\cdot c$ e) $4u^2-14u\cdot v+4u\cdot w+12v^2-5v\cdot w-3w^2$
f) $x^2+4y^2+z^2+4x\cdot y-2x\cdot z-4y\cdot z$
g) $4a^2+9b^2+16c^2-12a\cdot b-16a\cdot c+24b\cdot c$
h) $8s^3-14s^2\cdot t-3s\cdot t^2+9t^3$
i) $8s^3-36s^2\cdot t+54s\cdot t^2-27t^3$ j) $8x\cdot y$ k) $3y^2$

2.89 a) $4(u+v)$ b) $0{,}3(a-b)$ c) $x\,(y+z)$ d) $x\cdot y\cdot(y+x)$ e) $x\cdot(3x^2-2)$
f) $4u\cdot v\cdot(4-3v)$ g) $2{,}5m\cdot(2n+k)$ h) $x\cdot(y+1)$ i) $a\cdot(a+1)$ j) $-4(x+1)$

2.90 a) $3(r\cdot s+2s\cdot t-r)$ b) $12u\cdot(3v-2u+1)$ c) $3a\cdot b\cdot(1-3a+2a\cdot b)$
d) $-x\cdot(u+v-1)$ e) $x\cdot(x^2+x+1)$ f) $x\cdot y\cdot(y+1-x+x\cdot y)$

2.91 a) $u\cdot(m_0-3m^2)$ b) $K_0\cdot(1+i)$ c) $R_0\cdot(1+\alpha\cdot(\vartheta-\vartheta_0))$ d) $t\cdot\left(v_0+\frac{a}{2}\cdot t\right)$

2.92 a) $(a+b)\cdot(2+x)$

b) $(1-a)\cdot(x+y)$

c) $(a-3)\cdot(a-1)$

d) $(u-v)\cdot(a+1)$

e) $u\cdot(u+1)\cdot(3+u)$

f) $(r+3t)\cdot(5a-b)$

g) $(3a+1)\cdot(3b+2)$

h) $(x+2)\cdot(x-y)$

i) $(3u-2)\cdot(3v-1)$

2.93 a) a^2+6a+9

b) $9u^2-6u\cdot v+v^2$

c) $9x^2-24x\cdot y+16y^2$

d) r^2-4s^2

e) $16u^2-9v^2$

f) $m^2+2m\cdot n+n^2-(m^2-2m\cdot n+n^2)=$
$= 4m\cdot n$

g) $25a^2-10a\cdot b+b^2-(25a^2-b^2)=$
$=-10a\cdot b+2b^2$

h) $4x^2-4x+1-(1-4x+4x^2)=0$

i) $u^2+4u\cdot v+4v^2-(4u^2+4u\cdot v+v^2)=$
$=-3u^2+3v^2$

2.94 a) $(x+y)^2$

b) $(m-n)^2$

c) $(x+2y)^2$

d) $(b-4)^2$

e) $(2v+1)^2$

f) $9\cdot(s-1)^2$

g) $(3u-v)^2$

h) $(u-0{,}1)^2$

i) $0{,}25(x^2-2{,}4x+1{,}44)=$
$=0{,}5^2\cdot(x-1{,}2)^2$

2.95 a) $(x-y)\cdot(x+y)$

b) $(u-2v)\cdot(u+2v)$

c) $(3m-4n)\cdot(3m+4n)$

d) $(x-1)\cdot(x+1)$

e) $m\cdot(m-1)\cdot(m+1)$

f) $2(x-3)\cdot(x+3)$

g) $(a-0{,}1)\cdot(a+0{,}1)$

h) $(1-4p)\cdot(1+4p)=$
$=-(4p-1)\cdot(4p+1)$

i) $(1-0{,}1\,x)\cdot(1+0{,}1\,x)=$
$=-0{,}01\cdot(x-10)\cdot(x+10)$

j) $y^2\cdot(1-2y)\cdot(1+2y)$

k) $(x-y)\cdot(x+y)\cdot(x^2+y^2)$

i) $(T-3)\cdot(T+3)\cdot(T^2+9)$

2.96 *a)* $\pi\cdot(R-r)\cdot(R+r)$

b) $\frac{\pi}{4}\cdot\rho\cdot h\cdot(D-d)\cdot(D+d)$

c) $\frac{1}{2}\cdot g\cdot(t_2-t_1)\cdot(t_2+t_1)$

d) $\frac{1}{2}\cdot m\cdot(v_2-v_1)\cdot(v_2+v_1)$

2.97 a) $(x+2)\cdot(x+3)$

b) $(x+3)\cdot(x-2)$

c) $(x+6)\cdot(x-2)$

d) $(x-2)\cdot(x-1)$

2.98 *a)* $x^2+4x+4=(x+2)^2$

b) $x^2+12x+36=(x+6)^2$

c) $x^2-6x+9=(x-3)^2$

d) $a^2+18a+81=(a+9)^2$

e) $u^2-u+\frac{1}{4}=\left(u-\frac{1}{2}\right)^2$

f) $4b^2+12b+9=(2b+3)^2$

g) $9z^2-12z+4=(3x-2)^2$

h) $4v^2+8v+4=(2v+2)^2$

i) $4v^2+4v+1=(2v+1)^2$

j) $16t^2-8t+1=(4t-1)^2$

2.99 *a)* 0,09 b) 0,09 c) $\frac{1}{8}$ d) 1 e) $\frac{1}{8}$

f) $\frac{1}{0{,}01}=100$ g) $\frac{1}{4}$ h) 32 i) 2 j) 1

2.100 a) 12 b) 54 c) 40 d) 100

2.101 a) 16 b) –16 c) –64 d) –64 e) –8 f) –16 g) 8 h) 0 i) 0 j) 0

2.102 a) richtig b) falsch c) richtig

2.103 a) $\frac{1}{3^2}$ b) $\frac{1}{0{,}1^2}$ c) $\frac{3}{4^5}$ d) $\frac{3}{5}$ e) $\frac{8}{3}$ f) $\frac{1}{x^3}$

g) $\frac{4}{x^2\cdot y^3}$ h) $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ i) $\frac{1}{2^2\cdot 3}$ j) 2^4 k) $\frac{3^2}{2^2}$ l) $\frac{1}{a+b}$

m) $\frac{1}{(x-2y)^2}$ n) $1+\frac{3}{y^3}$ o) $2-\frac{1}{(5x)^2}$

2.104 *a)* $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) -8 d) $-\frac{1}{8}$ e) $\frac{1}{18}$ f) $\frac{9}{2}$

g) $\frac{9}{4}$ h) -8 i) -4 j) 1000

2.105 a) $\frac{2}{x^2}$ b) $\frac{x}{3}$ c) $\frac{1}{4x}$ d) $2x^3$

e) $\frac{2}{a^4 \cdot b}$ f) $\frac{x \cdot z}{y^2}$ g) $\frac{b \cdot c^2}{a^3}$ h) $\frac{2}{x^3}+\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x}$

2.106 a) 2^{-1} b) 4^{-2} c) $3x \cdot y^{-1}$ d) $a^2 \cdot b^{-3}$

e) $x^{-1}+x^{-2}$ f) $(x+1)^{-1}$ g) $2 \cdot (a+b)^{-2}$ h) $a \cdot (a-1)^{-1} \cdot (a+3)^{-2}$

2.107 a) $J \cdot kg^{-1}$ b) s^{-1} c) $A \cdot m^{-1}$ d) $N \cdot m^{-2}$ e) $kg \cdot m^{-3}$
f) $J \cdot m^{-3}$ g) $kg \cdot m \cdot s^{-1}$ h) $J\ kg^{-1} \cdot K^{-1}$ i) $V \cdot s \cdot m^{-2}$ j) $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$

2.108 a) 10^{-3} b) 10^{-4} c) 10^{-1} d) 10^{-5} e) 10^{-8}

2.109 a) $10\,000 = 10^4$ b) $1\,000\,000 = 10^6$

c) $1\,000\,000\,000 = 10^9$ d) $1\,000\,000\,000\,000 = 10^{12}$

2.110 a) $2 \cdot 10^{-1}$ b) $4 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3}$

c) $-(1 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3}) = -1 \cdot 10^0 - 1 \cdot 10^{-1} - 1 \cdot 10^{-2} - 3 \cdot 10^{-3}$

d) $2 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 0 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3} + 8 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 10^{-5}$

2.111 $b^2 = (-b)^2$

2.112 a) $2x^3 + x$ b) $-2n^2$ c) $-2x^2 + 3y^2$ d) $x^3 + 4x^2 - x$

e) $x^2 + x^2 \cdot y + 2x \cdot y^2$ f) $\frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot b - \frac{5}{3} \cdot a \cdot b^2$

2.113 a) falsch b) falsch c) wahr d) falsch e) wahr f) falsch g) falsch h) falsch

2.114 a) 1000 b) 0,1 c) 0,000001 d) 1 e) 200000
f) 20000 g) 11000 h) 120000 i) 90000 j) 0,09

2.115 a) u^7 b) a c) $2y^3$ d) $2r$ e) b^{n+2}
f) $6 \cdot k^{2+m}$ g) $3\ w^n$ h) t^4 i) $2\ t^3$ j) c^{m+1}

2.116 a) $b^3 \cdot x$ b) $4b$ c) $\frac{r \cdot s^2}{2}$ d) $2u \cdot v^2$

e) $(3n-m)^2$ f) 1 g) $(3n-m)^3$ h) $(3n-m)^3$

2.117 a) 4 b) 81 c) 0,1 d) 0,00001 e) –2401
f) 1000 g) 64 h) –64 i) x^{n+1} j) a^2

2.118 a) n = 3 b) n = 4 c) n = 1 d) n = 2 e) n = 3
f) n = 4 g) n = 3 h) n = –3 i) n = –3 j) n = 1

2.119 a) 10^n b) $4^{-2} = \frac{1}{16}$ c) $(2x)^2 = 4x^2$ d) $\frac{4u^n}{v}$ e) u^n

f) r^3 g) $\frac{1}{2}$ h) b^5 i) $u + 2v$ j) $(4-x)^3$

2.120 a) $64a^3$ b) $4a^2 \cdot b^2$ c) $16b^3$ d) $16x^6$ e) 2

f) $\frac{2}{b^2}$ g) $\frac{2}{b}$ h) $8u^3$ i) $32u^3$ j) $-32a^4 \cdot b$

2.121 a) 1 b) 1 c) 64 d) 16 e) 16

2.122 a) $\frac{y^2}{4}$ b) $\frac{64b^3}{27a^3}$ c) $\frac{4x^2 \cdot y^2}{9}$ d) r^4 e) $a^n \cdot b^n$

2.123 a) 27 b) 32 c) 16 d) 64 e) 25

2.124 a) $2^6 = 64$ b) $4^0 = 1$ c) $2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$ d) $3^2 = 9$ e) x^{10} f) $4x^4$ g) x^{6n}

h) y^6 i) $\frac{25}{a^2}$ j) $\frac{c^3}{b}$ k) 2^{6n} l) $4^{(n^2)}$ m) $2^{n \cdot m - m}$ n) $9u^{2m+2}$ o) $k \cdot s^n$

2.125 a) 9^6 b) 27^4 c) 81^3 d) 729^2

2.126 a) 64 b) 64 c) 256 d) 512 e) 250000 f) $\frac{9}{100} = 0{,}09$ g) $\frac{1}{500} = 0{,}002$

h) $\frac{1}{40000} = 0{,}000025$ i) $\frac{1}{40000} = 0{,}000025$ j) -250

2.127 a) $4x^4$ b) $\frac{9}{a^4}$ c) $\frac{1}{x^6}$ d) $\frac{b^6}{a^2}$ e) $\frac{y}{x^2}$ f) $\frac{v}{u}$ g) $m \cdot n$ h) $\frac{r^2}{s^2}$ i) $\frac{1}{4a^2b^4}$ j) x^{12}

2.128 a) $-x^4$ b) $-8u^6$ c) $\frac{9}{u^2}$ d) $\frac{2}{a^2}$ e) $-\frac{r^2}{3}$

2.129 a) wahr b) falsch c) falsch d) wahr **2.130** a) wahr b) wahr c) wahr d) falsch

2.131 a) 3 b) –2 c) m d) n–1

2.132 a) $2^n \cdot 3$ b) $2^n \cdot (2^n + 1)$ c) $2^n \cdot (2 + 2^{2n})$ d) $2^n \cdot (2^m + 2)$

2.133 a) $x^{2n} - 1$ b) $1 - \frac{1}{s^{2n}}$ c) $2^{2n} + 2 + \frac{1}{2^{2n}}$ d) $1 + \frac{1}{r^{2m}}$ e) $a^n - 1$ f) $1 + \frac{1}{b^n}$

g) $a^{2n} - \frac{1}{a^{2n}}$ h) $p^{2n} - \frac{1}{p^{2n}}$

2.134 a) $\frac{x}{5b}$ b) $\frac{7v \cdot w^3}{u}$ c) $\frac{r^4 \cdot t}{4}$ d) 36 e) $\frac{4s}{r}$ f) $\frac{2y \cdot z^2}{5}$ g) $\frac{3x \cdot y}{u}$ h) $16q^4 \cdot r^7$ i) $\frac{r^2}{t^2}$

j) $\frac{25}{4n^2}$ k) $\frac{9k}{4s}$ l) $\left(-\frac{b}{a}\right)^n$

2.135 a) 2 KB b) 4 KB c) 64 KB d) 1024 KB **2.136** 16 Adressleitungen

2.137 a) 123 b) 4601 c) 577 000 d) 770 000 000 e) 0,93 f) 0,0044
g) 0,000 078 7 h) 0,000 000 29 i) 0,000 000 030 1 j) 0,000 000 000 29

2.138 a) $1{,}23 \cdot 10^1$ b) $5{,}4321 \cdot 10^3$ c) $1{,}00001 \cdot 10^5$ d) $1{,}2 \cdot 10^{-1}$
e) $-5{,}3 \cdot 10^{-3}$ f) $4{,}4 \cdot 10^{-4}$ g) $7{,}7 \cdot 10^{-7}$ h) $5{,}2 \cdot 10^{-11}$

2.139 a) $2{,}38 \cdot 10^{-5}\,K^{-1}$ b) $1{,}64 \cdot 10^{-5}\,K^{-1}$ c) $9 \cdot 10^{-7}\,K^{-1}$

2.140 a) falsch, $2 \cdot 10^7$ b) falsch, $0{,}5 \cdot 10^{-4} = 5 \cdot 10^{-5}$ c) wahr d) wahr e) wahr f) wahr

2.141 a) $43 \cdot 10^3$ m b) $4 \cdot 10^2$ cm c) $3 \cdot 10^1$ dm d) $3 \cdot 10^{-1}$ m
e) $5 \cdot 10^{-4}$ km f) $3 \cdot 10^{-5}$ km g) $5 \cdot 10^{-2}$ dm h) $2 \cdot 10^{-4}$ cm

2.142 a) $8\cdot10^2\ dm^2$ b) $2\cdot10^2\ cm^2$ c) $3\cdot10^4\ cm^2$ d) $5\cdot10^{-2}\ m^2$
e) $4\ 10^{-2}\ dm^2$ f) $5\cdot10^{-4}\ m^2$ g) $7\cdot10^{-4}\ dm^2$ h) $5\cdot10^{-6}\ m^2$

2.143 a) $3\cdot10^3\ dm^3$ b) $5\cdot10^3\ cm^3$ c) $7\cdot10^6\ mm^3$ d) $4\cdot10^{-3}\ m^3$
e) $3\cdot10^{-3}\ dm^3$ f) $40\cdot10^{-6}\ dm^3$ g) $340\cdot10^{-3}\ l$ h) $300\cdot10^3\ mm^3$

2.144 a) 24300 cm = 243 m = 0,243 km b) $2{,}87\cdot10^4$ mm = $2{,}87\cdot10^2$ dm = $2{,}87\cdot10^1$ m
c) 0,453 g = 0,0463 dag = 0,000453 kg d) $4{,}29\cdot10^{-1}$ kg = $4{,}29\cdot10^1$ dag = $4{,}29\cdot10^2$ g
e) 6,91 m = $6{,}91\cdot10^1$ dm = $6{,}91\cdot10^2$ cm f) $3{,}87\cdot10^{-1}$ dm = 3,87 cm = $3{,}87\cdot10^1$ mm
g) 3,3dm = 33 cm = 330 mm h) 0,0017 m = 1,7 mm = 1700 µm

2.145 a) 300 dm^2 = 30000 cm^2 = 3 000 000 mm^2 b) 40000 mm^2 = 4 dm^2 = 0,04 m^2
c) 5,64 cm^2 = 0,0564 dm^2 = 0,000564 m^2 d) 34 dm^2 = 3400 cm^2 = 340000 mm^2
e) 0,67 cm^2 = 67 mm^2 = 0,000067 m^2 f) 0,0051 dm^2 = 0,51 cm^2 = 51 mm^2
g) $4{,}23\cdot10^{-1}\ m^2 = 4{,}23\cdot10^1\ dm^2 = 4{,}23\cdot10^5 mm^2$
h) $5{,}38\cdot10^{-3}\ dm^2 = 5{,}38\cdot10^{-1}\ cm^2 = 5{,}38\cdot10^1\ mm^2$

2.146 a) 1000 dm^3 = 1 000 000 cm^3 = 10 hl b) 10 dm^3 = 10000 cm^3 = 0,1 hl
c) 0,340 m^3 = 340 *l* = 340000 cm^3 d) 4 *l* = 0,004 m^3 = 4 000 000 mm^3
e) $4{,}29\cdot10^1\ dm^3 = 4{,}29\cdot10^{-2}\ m^3 = 4{,}29\cdot10^1\ l$ f) $6{,}7\cdot10^2$ d m^3 = $6{,}7\cdot10^{-1}\ m^3$ = 6,7 hl
g) 4,5 cm^3 = 0,045 dl = 4500 mm^3 h) 0,0024 cm^3 = 2,4 mm^3 = 0,0024 ml
i) 0,0288 *l* = 28,8 cm^3 = 28,8 ml
j) 0,0317 dm^3 = 31,7 cm^3 = 31700 mm^3

2.147 a) $1\frac{kg}{dm^3}$ b) $1\frac{g}{cm^3}$ c) $1\frac{g}{ml}$ d) $0{,}001\frac{kg}{cm^3}$
e) $0{,}000\,001\frac{kg}{dm^3}$ f) $10\frac{kg}{dm^3}$ g) $10\,000\frac{kg}{m^3}$ h) $1000\frac{kg}{m^3}$

2.148 a) $\frac{3600}{1000}\frac{km}{h} = 3{,}6\ \frac{km}{h}$ b) $\frac{1}{600}\frac{m}{s} = 0{,}001\dot{6}\ \frac{m}{s}$ c) $\frac{50}{3}\frac{m}{s} = 16{,}\dot{6}\ \frac{m}{s}$
d) $\frac{1}{6000}\frac{m}{s} = 0{,}0001\dot{6}\ \frac{m}{s}$ e) $\frac{3}{5000}\frac{km}{h} = 0{,}0006\ \frac{km}{h}$ f) $\frac{18}{5}\frac{m^3}{h} = 3{,}6\ \frac{m^3}{h}$
g) $\frac{5}{18}\frac{ml}{s} = 0{,}2\dot{7}\ \frac{ml}{s}$ h) $\frac{50}{3}\frac{ml}{s} = 16{,}\dot{6}\ \frac{ml}{s}$

2.149 a) $100\ \frac{N}{m}$ b) $10\,000\ \frac{N}{m^2}$ c) $1000\ \frac{m}{s}$ d) 3600000 Ws

2.150 a) 2000 µm b) 0,05 mm = 50 µm c) 340 cm d) 40 g e) 80 cl f) 40 µs

2.151 a) 300 mm bis 1 mm b) 1000 µm bis 0,78 µm c) 380 nm bis 0,6 nm

2.152 200 Milliarden Tonnen ($2\cdot10^{11}$ t = 200 000 000 000 t)

2.153 10^{51} Atome

2.154 $3{,}33\cdot10^{25}$ Moleküle = $\frac{1}{3}\cdot10^{26}$ Moleküle

2.155 $\rho = 5540\frac{kg}{m^3} = 5{,}54\ \frac{kg}{dm^3}$

2.156 ca. $9{,}47\cdot10^{12}$ km

2.157 ca. 5,6 h bzw. ca. 4,2 Jahre

2.158 a) 380 nm bzw. 780 nm b) $7{,}89\cdot10^{14}$ Hz bzw. $3{,}87\cdot10^{14}$ Hz

2.159 a) 7 b) 10 c) 11 d) 12 e) 15 f) 100 g) 1 h) 0

i) 0,5 j) 0,3 k) 0,1 l) $\frac{1}{2}$ m) $\frac{1}{3}$ n) $\frac{1}{7}$ o) $\frac{1}{10}$

2.160 a) 2 b) 4 c) 6 d) 3 e) 0 f) 1 g) 10 h) 2

i) 3 j) 2 k) 2 l) 0,5 m) 0,1 n) $\frac{1}{2}$ o) $\frac{1}{2}$

2.161 a) 31,62 b) 14,1 c) 0,316 d) 0,316 e) 0,50

f) 0,50 g) 0,250 h) 4,95 i) 21,5 j) 0,50

2.162 a) 10 b) 0 c) 8 d) $\frac{1}{5}$ e) $4y$ f) 1 g) $\frac{1}{2}$ h) 10 i) 1

2.163 a) $u \neq 2$ b) $s \neq 0$ c) $x \neq 2$; $x \neq -2$ d) $p \neq \frac{3}{2}$

2.164 a) $a \neq b$ b) $a \neq \frac{b}{2}$ c) $u \neq \frac{v}{2}$ d) $x \neq 0$; $y \neq 0$

e) $x \neq 0$; $y \neq 0$ f) $r \neq -1$; $h \neq 1$ g) $x \neq \frac{4}{y}$ h) $a \neq -\frac{b}{2}$; $a \neq \frac{b}{2}$

2.165 a) $\frac{4a^2}{6a \cdot b}$ b) $\frac{-x+y}{2y}$ c) $\frac{(a+3b)^2}{(a-3b)\cdot(a+3b)} = \frac{a^2+6a\cdot b+9b^2}{a^2-9b^2}$

2.166 a) $\frac{16a}{12}$ b) $\frac{2x^2-x}{x^2}$ c) $\frac{3a^2\cdot b-a\cdot b^2}{2a\cdot b^2}$ d) $\frac{2x}{2x^2-2x}$ e) $\frac{u^2-2u\cdot v+v^2}{u^2-v^2}$

f) $\frac{-2a\cdot b-4b^2}{a^2-4b^2}$ g) $\frac{2a-1}{2a-1}$ h) $\frac{2x-1}{1-3x}$ i) $\frac{3a\cdot y-a}{a\cdot x-4a\cdot y}$

2.167 a) $\frac{2v^2}{3u}$ b) $\frac{3}{m}$ c) $2{,}5q$ d) $\frac{4}{3}$ e) $1-a$ f) $\frac{s+3}{3}$ g) $\frac{2h+3}{4}$ h) $\frac{a-b}{a\cdot b}$

2.168

a) $\frac{m^2-n^2}{m+n} = \frac{(m-n)\cdot(m+n)}{m+n} = m-n$

b) $\frac{(3p+3)\cdot(p-2)}{3p^2-12} = \frac{3\cdot(p+1)\cdot(p-2)}{3\cdot(p-2)\cdot(p+2)} = \frac{p+1}{p+2}$

c) $\frac{m-n}{n-m} = \frac{-(n-m)}{n-m} = -1$

d) $\frac{3a^2-12a+12}{a^2-4} = \frac{3\cdot(a-2)^2}{(a-2)\cdot(a+2)} = \frac{3\cdot(a-2)}{a+2}$

e) $\frac{y^2-9}{y^2-6y+9} = \frac{(y-3)\cdot(y+3)}{(y-3)^2} = \frac{y+3}{y-3}$

f) $\frac{u^2-v^2}{(u-v)^2} = \frac{(u-v)\cdot(u+v)}{(u-v)^2} = \frac{u+v}{u-v}$

g) $\frac{8r^2+4r}{4r^3-r} = \frac{4r\cdot(2r+1)}{r\cdot(2r-1)\cdot(2r+1)} = \frac{4}{2r-1}$

h) $\frac{(3x+3)^2}{9x^2-9} = \frac{9\cdot(x+1)^2}{9\cdot(x-1)\cdot(x+1)} = \frac{x+1}{x-1}$

2.169

a) $\frac{3}{2} + \frac{u-4}{2} = \frac{u-1}{2}$

b) $\frac{2n}{5m} - \frac{n}{5m} = \frac{n}{5m}$

c) $\frac{u-v}{3} - \frac{u+v}{3} = -\frac{2v}{3}$

d) $\frac{3k+1}{k} - \frac{2k+1}{k} = \frac{k}{k} = 1$

e) $\frac{3+2x}{y} - \frac{x-4}{y} + \frac{2x-7}{y} = \frac{3x}{y}$

f) $\frac{(2h-1)^2}{2a} - \frac{(2h+1)^2}{2a} + \frac{(2h+1)\cdot(2h-1)}{2a} =$

$= \frac{4h^2-4h+1-(4h^2+4h+1)+4h^2-1}{2a} =$

$= \frac{4h^2-8h-1}{2a}$

2.170 *a*) $\frac{4}{3b}-\frac{5}{6b}=\frac{8-5}{6b}=\frac{3}{6b}=\frac{1}{2b}$

b) $\frac{3}{x\cdot y}+\frac{5}{x}=\frac{3+5y}{x\cdot y}$

c) $\frac{1}{z^2}-\frac{4}{3z}=\frac{3-4z}{3z^2}$

d) $\frac{2m}{3k^2}+\frac{3}{k}=\frac{2m+9k}{3k^2}$

e) $\frac{3}{p}-1=\frac{3-p}{p}$

f) $2-\frac{a+b}{b}=\frac{2b-(a+b)}{b}=\frac{b-a}{b}$

g) $t-\frac{s\cdot t-1}{s}=\frac{s\cdot t-(s\cdot t-1)}{s}=\frac{1}{s}$

h) $\frac{1}{m^2}+\frac{2}{m\cdot n}+\frac{1}{n^2}=\frac{n^2+2m\cdot n+m^2}{m^2\cdot n^2}$

i) $\frac{4}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{2}=\frac{8y-2x+x\cdot y}{2x\cdot y}$

j) $\frac{1}{y}-(1+x)=\frac{1-y\cdot(1+x)}{y}=\frac{1-y-x\cdot y}{y}$

k) $\frac{1}{a}+b-\frac{x}{2y}=\frac{2y+2a\cdot b\cdot y-a\cdot x}{2a\cdot y}$

l) $1+\frac{1}{n}-\frac{1+2m}{2m}=\frac{2m\cdot n+2m-n-2m\cdot n}{2m\cdot n}=\frac{2m-n}{2m\cdot n}$

2.171 *a*) $1+\frac{1}{u-v}=\frac{u-v+1}{u-v}$

b) $\frac{3r}{5r-1}-\frac{3}{5}=\frac{15r-15r+3}{5\cdot(5r-1)}=\frac{3}{5\cdot(5r-1)}$

c) $a+\frac{1}{a-2}=\frac{a\cdot(a-2)+1}{a-2}=\frac{a^2-2a+1}{a-2}$

d) $\frac{1}{2}+\frac{r}{r-s}=\frac{r-s+2r}{2\cdot(r-s)}=\frac{3r-s}{2\cdot(r-s)}$

e) $1-\frac{u+v}{u-v}=\frac{u-v-(u+v)}{u-v}=-\frac{2v}{u-v}$

f) $u+v-\frac{1}{u-v}=\frac{(u+v)\cdot(u-v)-1}{u-v}=$

$=\frac{u^2-v^2-1}{u-v}$

g) $\frac{4}{z+2}+1-z=\frac{4+(z+2)\cdot(1-z)}{z+2}=$

$=\frac{6-z-z^2}{z+2}$

h) $\frac{1}{p+2}-1+p=\frac{1+(p+2)\cdot(-1+p)}{p+2}=$

$=\frac{p^2+p-1}{p+2}$

2.172 *a*) $\frac{3}{2x+2y}-\frac{1}{x+y}=\frac{3-2}{2x+2y}=\frac{1}{2x+2y}$

b) $\frac{3}{m+3}-\frac{2}{m-3}=\frac{3\cdot(m-3)-2\cdot(m+3)}{(m+3)\cdot(m-3)}=\frac{m-15}{m^2-9}$

c) $\frac{1}{2x}-\frac{1}{2x+1}=\frac{2x+1-2x}{2x\cdot(2x+1)}=\frac{1}{2x\cdot(2x+1)}$

d) $\frac{a}{a+1}-\frac{2}{a+2}=\frac{a\cdot(a+2)-2\cdot(a+1)}{(a+1)\cdot(a+2)}=\frac{a^2-2}{a^2+3a+2}$

e) $\frac{m}{m^2-1}-\frac{1}{m-1}=\frac{m-(m+1)}{(m+1)\cdot(m-1)}=-\frac{1}{m^2-1}$

f) $\frac{u}{1-u}+\frac{u}{u+1}=\frac{-u\cdot(u+1)+u\cdot(u-1)}{(u-1)\cdot(u+1)}=-\frac{2u}{u^2-1}$

g) $\frac{s-1}{s+1}-\frac{s}{s^2-1}=\frac{(s-1)^2-s}{(s+1)\cdot(s-1)}=\frac{s^2-3s+1}{s^2-1}$

h) $\frac{s-1}{s+1}-\frac{s}{1-s^2}=\frac{(s-1)^2+s}{(s+1)\cdot(s-1)}=\frac{s^2-s+1}{s^2-1}$

2.173 a) $\frac{1}{a+b}-\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{a^2-b^2}=\frac{(a-b)^2-(a+b)+(a-b)}{(a+b)\cdot(a-b)^2}=\frac{a^2-2a\cdot b+b^2-a-b+a-b}{(a+b)\cdot(a-b)^2}=$

$=\frac{a^2-2a\cdot b+b^2-2b}{(a+b)\cdot(a-b)^2}$

b) $\frac{1}{1+s}+\frac{s-1}{(s+1)^2}-\frac{2s}{1-s^2}=\frac{1}{s+1}+\frac{s-1}{(s+1)^2}+\frac{2s}{s^2-1}=$

$=\frac{s^2-1+(s-1)^2+2s\cdot(s+1)}{(s+1)^2\cdot(s-1)}=\frac{s^2-1+s^2-2s+1+2s^2+2s}{(1+s)^2\cdot(s-1)}=\frac{4s^2}{(1+s)^2\cdot(s-1)}$

c) $\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t+1}-\frac{t}{t^2-1}=\frac{t+1+t-1-t}{t^2-1}=\frac{t}{t^2-1}$

d) $\frac{1}{1-a}-\frac{1}{(1-a)^2}+\frac{1+2a-a^2}{(1-a)^3}=$

$=\frac{(1-a)^2-(1-a)+1+2a-a^2}{(1-a)^3}=\frac{1-2a+a^2-1+a+1+2a-a^2}{(1-a)^3}=\frac{1+a}{(1-a)^3}=-\frac{a+1}{(a-1)^3}$

e) $\frac{2a}{a^2-1}-\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a+1}=\frac{2a-(a+1)-(a-1)}{a^2-1}=0$

f) $\frac{4x-2}{x^2-1}-\frac{3}{1+x}+\frac{1}{x-1}-\frac{2}{1-x}=\frac{4x-2}{x^2-1}-\frac{3}{x+1}+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-1}=\frac{4x-2-3\cdot(x-1)+3\cdot(x+1)}{x^2-1}=$

$=\frac{4x-2-3x+3+3x+3}{x^2-1}=\frac{4x+4}{x^2-1}=\frac{4\cdot(x+1)}{x^2-1}=\frac{4}{x-1}$

g) $\frac{1}{1-\frac{y}{x}}-\frac{y^2-x\cdot y}{y^2-x^2}-1=$

$=\frac{x}{x-y}+\frac{y^2-x\cdot y}{x^2-y^2}-1=\frac{x\cdot(x+y)+y^2-x\cdot y-(x^2-y^2)}{x^2-y^2}=$

$=\frac{x^2+x\cdot y+y^2-x\cdot y-x^2+y^2}{x^2-y^2}=\frac{2y^2}{x^2-y^2}$

h) $\frac{3}{u^2+2u\cdot v+v^2}+\frac{2v}{u^2-v^2}+\frac{1}{u+v}-\frac{1}{u-v}=\frac{3\cdot(u-v)+2v\cdot(u+v)+(u^2-v^2)-(u+v)^2}{(u+v)^2\cdot(u-v)}=$

$=\frac{3u-3v+2u\cdot v+2v^2+u^2-v^2-u^2-2u\cdot v-v^2}{(u+v)^2\cdot(u-v)}=\frac{3u-3v}{(u+v)^2\cdot(u-v)}=\frac{3\cdot(u-v)}{(u+v)^2\cdot(u-v)}=$

$=\frac{3}{(u+v)^2}$

i) $-\frac{3}{1-3u}+\frac{4u}{1-9u^2}-\frac{4u}{9u^2-6u+1}=\frac{3}{3u-1}-\frac{4u}{9u^2-1}-\frac{4u}{9u^2-6u+1}=$

$=\frac{3\cdot(9u^2-1)-4u\cdot(3u-1)-4u\cdot(3u+1)}{(3u-1)^2\cdot(3u+1)}=\frac{27u^2-3-12u^2+4u-12u^2-4u}{(3u-1)^2\cdot(3u+1)}=$

$=\frac{3u^2-3}{(3u-1)^2\cdot(3u+1)}$

j) $\frac{4}{x^3+2x^2}+\frac{4}{x^4-4x^2}+\frac{1}{x^2+4x+4}-\frac{1}{x^2-4}=$

$=\frac{4}{x^2\cdot(x+2)}+\frac{4}{x^2\cdot(x-2)\cdot(x+2)}+\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{1}{(x-2)\cdot(x+2)}=$

$=\frac{4\cdot(x^2-4)+4\cdot(x+2)+x^2\cdot(x-2)-x^2\cdot(x+2)}{x^2\cdot(x+2)^2\cdot(x-2)}=$

$=\frac{4x^2-16+4x+8+x^3-2x^2-x^3-2x^2}{x^2\cdot(x+2)^2\cdot(x-2)}=\frac{-8+4x}{x^2\cdot(x+2)^2\cdot(x-2)}=$

$=\frac{4\cdot(x-2)}{x^2\cdot(x+2)^2\cdot(x-2)}=\frac{4}{x^2\cdot(x+2)^2}$

2.174 a) $1+\frac{y}{x}$ b) $\frac{1}{v}-\frac{1}{u}$ c) $1+\frac{2}{b}$ d) $\frac{1}{r}+\frac{1}{p}$ e) $\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+\frac{1}{m\cdot n}$

f) $\frac{1}{y}+\frac{2y}{x}$ g) $\frac{c}{2}+1-\frac{1}{2c}$ h) $\frac{1}{2z}+\frac{1}{y}+\frac{1}{2x}$

2.175 a) $\frac{x}{3}\cdot\frac{6a}{x^2}=\frac{2a}{x}$ b) $2a\cdot\frac{b}{-3a^2}=-\frac{2b}{3a}$ c) $\frac{4u}{3v^2}\cdot 6v\cdot\frac{1}{u}=\frac{8}{v}$

d) $\frac{b+3}{b}\cdot(-b)^2=b^2+3b$ e) $\left(2+\frac{3}{m}\right)\cdot\frac{m}{3}=\frac{2m+3}{m}\cdot\frac{m}{3}=\frac{2m+3}{3}$

f) $\left(2-\frac{1}{k}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{k}\right)=\frac{2k-1}{k}\cdot\frac{2k+1}{k}=\frac{4k^2-1}{k^2}$ g) $m\cdot n\cdot\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)=m\cdot n\cdot\frac{n-m}{m\cdot n}=-m+n$

h) $\frac{r+2s}{k}\cdot\frac{r-2s}{r}=\frac{r^2-4s^2}{r^2}$ i) $a\cdot(u-v)\cdot\frac{u^2}{a\cdot u^2-a\cdot u\cdot v}=\frac{a\cdot u^2\cdot(u-v)}{a\cdot u\cdot(u-v)}=u$

j) $\frac{1-k^2}{1+k^2}\cdot\frac{1+k}{1-k}=\frac{(1-k)\cdot(1+k)^2}{(1+k^2)\cdot(1-k)}=\frac{k^2+2k+1}{k^2+1}$

k) $\frac{r^2-s^2}{r^2+r\cdot s}\cdot\frac{r+s}{r-s}=\frac{(r-s)\cdot(r+s)^2}{r\cdot(r+s)\cdot(r-s)}=\frac{r+s}{r}$

l) $\frac{a^3-16a}{a^3\cdot b^2-a\cdot b^2}\cdot\frac{a^2\cdot b^2-a\cdot b^2}{a^2-4a}=\frac{a(a-4)\cdot(a+4)}{a\cdot b^2\cdot(a-1)\cdot(a+1)}\cdot\frac{a\cdot b^2\cdot(a-1)}{a\cdot(a-4)}=\frac{a+4}{a+1}$

2.176 a) $\frac{9}{t-1}\cdot\frac{1}{3t+3}\cdot\frac{1-t^2}{-3}=\frac{9}{t-1}\cdot\frac{1}{3t+3}\cdot\frac{t^2-1}{3}=\frac{9\cdot(t-1)\cdot t+1)}{9\cdot(t-1)\cdot(t+1)}=1$

b) $\left(\frac{m}{m-1}-\frac{1}{m+1}\right)\cdot\frac{3}{m}\cdot\frac{m^2-1}{3m^3+3m}=\frac{m^2+m-m+1}{(m-1)\cdot(m+1)}\cdot\frac{3}{m}\cdot\frac{m^2-1}{3m\cdot(m^2+1)}=$

$=\frac{(m^2+1)\cdot 3\cdot(m^2-1)}{(m^2-1)\cdot m\cdot 3m\cdot(m^2+1)}=\frac{1}{m^2}$

c) $a\cdot\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right)\cdot\left(1-\frac{a^2+b^2}{2a^2}\right)=a\cdot\frac{a^2+2a\cdot b+b^2-a^2+2a\cdot b-b^2}{(a-b)\cdot(a+b)}\cdot\frac{2a^2-a^2-b^2}{2a^2}=$

$=a\cdot\frac{4a\cdot b}{a^2-b^2}\cdot\frac{a^2-b^2}{2a^2}=2b$

d) $\left(\frac{m}{m-n}-1\right)\cdot\left(1+\frac{m}{n-m}\right):\left(m-\frac{m^2+n^2}{2n}\right)=\frac{m-m+n}{m-n}\cdot\frac{n-m+m}{n-m}\cdot\frac{2m\cdot n-m^2-n^2}{2n}=$

$=\frac{n}{m-n}\cdot\frac{n}{n-m}\cdot\frac{-(m-n)^2}{2n}=\frac{n^2\cdot(m-n)^2}{(m-n)^2\cdot 2n}=\frac{n}{2}$

2.177 a) $\frac{6}{b}:2=\frac{3}{b}$ b) $3:\frac{6}{k}=3\cdot\frac{k}{6}=\frac{k}{2}$ c) $3a:\frac{9a\cdot b}{-2}=-3a\cdot\frac{2}{9a\cdot b\cdot}=-\frac{2}{3b}$

d) $2\cdot\frac{1}{r}:\frac{3}{4r}=\frac{2}{r}\cdot\frac{4r}{3}=\frac{8}{3}$ e) $\frac{3a}{-2b}:\frac{1}{-b}=\frac{3a}{2b}\cdot b=\frac{3a}{2}$

f) $\frac{3a\cdot b^2}{4}:(3a^2\cdot b^2)=\frac{3a\cdot b^2}{4}\cdot\frac{1}{3a^2\cdot b^2}=\frac{1}{4a}$ g) $\frac{2}{3m}:\frac{m+3}{m}=\frac{2}{3m}\cdot\frac{m}{m+3}=\frac{2}{3\cdot(m+3)}$

h) $\frac{x}{3\cdot(x+y)}:\frac{x}{6y}=\frac{x}{3\cdot(x+y)}\cdot\frac{6y}{x}=\frac{2y}{x+y}$

2.178 a) $\frac{3}{a+b}:\frac{4a}{a+b}=\frac{3}{a+b}\cdot\frac{a+b}{4a}=\frac{3}{4a}$ b) $\frac{p-3q}{q^2}:\frac{2p-6q}{q}=\frac{p-3q}{q^2}\cdot\frac{q}{2\cdot(p-3q)}=\frac{1}{2q}$

c) $\left(a+\frac{1}{b}\right):\left(b+\frac{1}{a}\right)=\frac{a\cdot b+1}{b}:\frac{a\cdot b+1}{a}=\frac{a}{b}$ d) $\frac{a^2-a\cdot b}{3a^2\cdot b}:\frac{b^2-a\cdot b}{2a\cdot b^2}=$

$=\frac{a\cdot(a-b)}{3a^2\cdot b}\cdot\frac{2a\cdot b^2}{b\cdot(b-a)}=-\frac{2}{3}$ e) $\frac{u^2-3u}{4-u}:\frac{u-4}{15-5u}=\frac{u\cdot(u-3)}{u-4}\cdot\frac{5\cdot(u-3)}{u-4}=$

$=\frac{5u\cdot(u-3)^2}{(u-4)^2}$ f) $\frac{m^4-1}{m\cdot n}:\frac{m^2+1}{2m\cdot n}=\frac{(m^2-1)\cdot(m^2+1)}{m\cdot n}\cdot\frac{2m\cdot n}{m^2+1}=2\cdot(m^2-1)$

g) $\left(\frac{a}{b}-\frac{a}{a+b}\right):\frac{a^2\cdot b-b^3}{a^2}=\frac{a\cdot(a+b)-a\cdot b}{b\cdot(a+b)}\cdot\frac{a^2}{b\cdot(a^2-b^2)}=\frac{a^2}{b\cdot(a+b)}\cdot\frac{a^2}{b\cdot(a^2-b)}=$

$=\frac{a^4}{b^2\cdot(a+b)\cdot(a^2-b^2)}$ h) $\left(\frac{s}{s^2-t^2}-\frac{1}{s-t}\right):\frac{s}{s+t}=\frac{s-s-t}{s^2-t^2}\cdot\frac{s+t}{s}=-\frac{t}{s\cdot(s-t)}$

i) $\left(-\frac{x^2}{x^2-y^2}+\frac{x}{x-y}\right):\frac{x}{x+y}=\frac{-x^2+x\cdot(x+y)}{x^2-y^2}\cdot\frac{x+y}{x}=\frac{x\cdot y}{x^2-y^2}\cdot\frac{x+y}{x}=\frac{y}{x-y}$

2.179 a) 3 b) 4 c) 2a d) 1 e) $\frac{1}{4}$ f) $\frac{1}{6}$ g) 2 h) 2 i) 3 j) $\frac{1}{3}$ k) 1 l) $\frac{1}{10}$

2.180 a) $\frac{\frac{y}{2}}{\frac{3}{x}}=\frac{y}{2}\cdot\frac{x}{3}=\frac{x\cdot y}{6}$ b) $\frac{\frac{y}{2}}{3}=\frac{y}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{y}{6}$ c) $\frac{y}{\frac{2}{3}}=\frac{y}{1}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3y}{2}$

d) $\frac{\frac{x-1}{4}}{x^2-1}=\frac{x-1}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{1}{4\cdot(x+1)}$ e) $\frac{\frac{4r^2-1}{s}}{\frac{2r-1}{s^2}}=$

$=\frac{(2r-1)\cdot(2r+1)}{s}\cdot\frac{s^2}{2r-1}=s\cdot(2r+1)$ f) $\frac{\frac{3}{m}}{\frac{1}{m}+1}=\frac{\frac{3}{m}}{\frac{1+m}{m}}=\frac{3}{m}\cdot\frac{m}{1+m}=\frac{3}{1+m}$

g) $\frac{m-\frac{1}{m}}{m-1}=\frac{\frac{m^2-1}{m}}{m-1}=\frac{(m-1)\cdot(m+1)}{m}\cdot\frac{1}{m-1}=\frac{m+1}{m}$ h) $\frac{\frac{2}{3}\cdot s}{\frac{1}{3}+s}=\frac{\frac{2s}{3}}{\frac{1+3s}{3}}=$

$=\frac{2s}{3}\cdot\frac{3}{1+3s}=\frac{2s}{1+3s}$ i) $\frac{x+\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}+x}=\frac{\frac{3x+2}{3}}{\frac{1+3x}{3}}=\frac{3x+2}{3}\cdot\frac{3}{1+3x}=\frac{3x+2}{3x+1}$

j) $\frac{\frac{2}{5}\cdot t+\frac{1}{5}}{\frac{1}{10}+t}=\frac{\frac{2t+1}{5}}{\frac{1+10t}{10}}=\frac{2t+1}{5}\cdot\frac{10}{10t+1}=\frac{2\cdot(2t+1)}{10t+1}$

2.181 a) $\dfrac{x-\frac{x+1}{2}}{x^2-1}=\dfrac{\frac{2x-x-1}{2}}{x^2-1}=\dfrac{x-1}{2}\cdot\dfrac{1}{(x-1)\cdot(x+1)}=\dfrac{1}{2\cdot(x+1)}$

b) $\dfrac{1-\frac{c}{1+c}}{\frac{1}{c}}=\dfrac{\frac{1+c-c}{1+c}}{\frac{1}{c}}=\dfrac{1}{1+c}\cdot c=\dfrac{c}{1+c}$

c) $\dfrac{\frac{p}{1+p}-1}{1+\frac{p}{1+p}}=\dfrac{\frac{p-1-p}{1+p}}{\frac{1+p+p}{1+p}}=\dfrac{-1}{1+p}\cdot\dfrac{1+p}{1+2p}=-\dfrac{1}{1+2p}$

d) $\dfrac{\frac{3a+6}{a}}{a+4+\frac{4}{a}}=\dfrac{\frac{3(a+2)}{a}}{\frac{a^2+4a+4}{a}}=\dfrac{3(a+2)}{a}\cdot\dfrac{a}{(a+2)^2}=\dfrac{3}{a+2}$

e) $\dfrac{\frac{3}{u}+\frac{u}{3}}{\frac{3}{u}-\frac{u}{3}}\cdot(9-u^2)=\dfrac{\frac{9+u^2}{3u}}{\frac{9-u^2}{3u}}\cdot(9-u^2)=\dfrac{9+u^2}{3u}\cdot\dfrac{3u}{9-u^2}\cdot(9-u^2)=9+u^2$

f) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{x}{1+\frac{1}{x}}+1=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{x}{\frac{x+1}{x}}+1=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{x^2}{x+1}+1=\dfrac{1+x^2+x+1}{x+1}=\dfrac{x^2+x+2}{x+1}$

g) $1-\dfrac{\frac{a+b}{2}-b}{a-\frac{a-b}{2}}=1-\dfrac{\frac{a+b-2b}{2}}{\frac{2a-a+b}{2}}=1-\dfrac{a-b}{2}\cdot\dfrac{2}{a+b}=1-\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{a+b-a+b}{a+b}=\dfrac{2b}{a+b}$

h) $\dfrac{1-\frac{1}{m^2-1}}{1-\frac{m}{m-\frac{1}{m}}}=\dfrac{\frac{m^2-1-1}{m^2-1}}{1-\frac{m}{\frac{m^2-1}{m}}}=\dfrac{\frac{m^2-2}{m^2-1}}{1-\frac{m^2}{m^2-1}}=\dfrac{\frac{m^2-2}{m^2-1}}{\frac{m^2-1-m^2}{m^2-1}}=\dfrac{m^2-2}{m^2-1}\cdot\dfrac{m^2-1}{-1}=2-m^2$

i) $\dfrac{\frac{u}{v}-1}{1-\frac{(u+v)^2}{4u\cdot v}}=\dfrac{\frac{u-v}{v}}{\frac{4u\cdot v-u^2-2u\cdot v-v^2}{4u\cdot v}}=\dfrac{u-v}{v}\cdot\dfrac{4u\cdot v}{-(u-v)^2}=-\dfrac{4u}{u-v}$

j) $\dfrac{\left(1-\frac{a}{1-\frac{a}{a+1}}\right)\cdot\frac{a}{a-1}}{1-a}=\dfrac{\left(1-\frac{a}{\frac{1}{a+1}}\right)\cdot\frac{a}{a-1}}{1-a}=\dfrac{(1-a\cdot(a+1))\cdot\frac{a}{a-1}}{1-a}=$

$=\dfrac{\frac{(1-a^2-a)\cdot a}{a-1}}{1-a}=\dfrac{(a^2+a-1)\cdot a}{(a-1)^2}$

2.181 k) $$\frac{1}{b}\cdot\frac{\frac{1}{1-b}-\frac{1}{1+b}}{\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1+b}}=\frac{1}{b}\cdot\frac{\frac{1+b-1+b}{(1-b)\cdot(1+b)}}{\frac{1+b+1-b}{(1-b)\cdot(1+b)}}=\frac{1}{b}\cdot\frac{2b}{(1-b)\cdot(1+b)}\cdot\frac{(1-b)\cdot(1+b)}{2}=1$$

l) $$1+\frac{1}{a}+\frac{\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1+a}}{\frac{1}{1-a}-\frac{1}{1+a}}=\frac{a+1}{a}+\frac{\frac{1+a+1-a}{(1-a)\cdot(1+a)}}{\frac{1+a-1+a}{(1-a)\cdot(1+a)}}=$$

$$=\frac{a+1}{a}+\frac{2}{(1-a)\cdot(1+a)}\cdot\frac{(1-a)\cdot(1+a)}{2a}=\frac{a+1}{a}+\frac{1}{a}=\frac{a+2}{a}$$

2.182 a) $$(u^{-1}+v^{-1})^{-1}=\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right)^{-1}=\left(\frac{v+u}{u\cdot v}\right)^{-1}=\frac{u\cdot v}{u+v}$$

b) $$(2x^{-1}-1)\cdot(2x^{-1}+1)=\left(\frac{2}{x}-1\right)\cdot\left(\frac{2}{x}+1\right)=\frac{4}{x^2}-1=\frac{4-x^2}{x^2}$$

c) $$\left(\frac{1}{3x^{-1}}+1\right)^{-1}=\left(\frac{x}{3}+1\right)^{-1}=\left(\frac{x+3}{3}\right)^{-1}=\frac{3}{x+3}$$

d) $$\frac{x^{-1}+y^{-1}}{x^{-2}-y^{-2}}=\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}=\frac{\frac{y+x}{x\cdot y}}{\frac{y^2-x^2}{x^2\cdot y^2}}=\frac{y+x}{x\cdot y}\cdot\frac{x^2\cdot y^2}{y^2-x^2}=\frac{x\cdot y}{y-x}=-\frac{x\cdot y}{x-y}$$

e) $$\left(2a^{-1}-\frac{a}{3}\right)^{-1}=\left(\frac{2}{a}-\frac{a}{3}\right)^{-1}=\left(\frac{6-a^2}{3a}\right)^{-1}=\frac{3a}{6-a^2}$$

f) $$\left(3+\frac{1}{k}\right)^{-1}:k=\left(\frac{3k+1}{k}\right)^{-1}\cdot\frac{1}{k}=\frac{k}{3k+1}\cdot\frac{1}{k}=\frac{1}{3k+1}$$

g) $$\left(m+\frac{2}{n}\right):(2n)^{-1}=\frac{m\cdot n+2}{n}\cdot 2n=2\cdot(m\cdot n+2)$$

h) $$\left(2m^{-1}-\frac{m^{-1}}{2}\right)^{-1}=\left(\frac{2}{m}-\frac{1}{2m}\right)^{-1}=\left(\frac{3}{2m}\right)^{-1}=\frac{2m}{3}$$

i) $$\left(\left(\frac{t}{2}\right)^{-1}+\frac{1}{2}\cdot t^{-1}+2t^{-1}\right)^{-1}=\left(\frac{2}{t}+\frac{1}{2t}+\frac{2}{t}\right)^{-1}=\left(\frac{4+1+4}{2t}\right)^{-1}=\left(\frac{9}{2t}\right)^{-1}=\frac{2t}{9}$$

2.183 $$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=\frac{2}{\frac{y+x}{x\cdot y}}=\frac{2x\cdot y}{x+y};\quad x=60\text{ km/h},\ y=80\text{ km/h}:\ \text{harmonisches Mittel}: 68{,}6\text{ km/h}$$

2.184 $$R=\left(R_1^{-1}+(R_2+R_3)^{-1}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2+R_3}\right)^{-1}=\left(\frac{R_2+R_3+R_1}{R_1\cdot(R_2+R_3)}\right)^{-1}=\frac{R_1\cdot(R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3}$$

2.185 a) $A = a + b$; $B = \frac{A}{2c}$; $v = 1 + B$

b) $A = 1 - 3x$; $B = \frac{A}{3y}$; $v = 4 - 2B$

c) $A = \frac{1}{y+z}$; $B = 3A + 1$; $v = 2B - x$

d) $A = \frac{1}{y+z}$; $B = 3A + 1$; $v = 2B - x$

e) $A = 2x - 1$; $B = \frac{A^2}{y-1}$; $v = x + B$

f) $A = \frac{h}{t^2}$; $B = 2 - A$; $C = (2+r)^2 \cdot B$; $D = h - C$; $v = \frac{D}{1+2h}$

2.186 a) $(6x^2 + x - 2):(3x + 2) = 2x - 1$

$$\underline{\pm 6x^2 \pm 4x}$$
$$0 \quad -3x - 2$$
$$\underline{\mp 3x \mp 2}$$
$$0$$

b) $(8x^3 + 18x^2 + 5x - 3):(4x + 3) = 2x^2 + 3x - 1$

$$\underline{\pm 8x^3 \pm 6x^2}$$
$$0 \quad +12x^2 + 5x - 3$$
$$\underline{\pm 12x^2 \pm 9x}$$
$$0 \quad -4x - 3$$
$$\underline{\mp 4x \mp 3}$$
$$0$$

c) $(2a^4 \quad - a^3 - 6a^2 + 6a + 9):(2a + 3) = a^3 - 2a^2 + 3$

$$\underline{\pm 2a^4 \pm 3a^3}$$
$$0 \quad -4a^3 - 6a^2 + 6a + 9$$
$$\underline{\mp 4a^3 \mp 6a^2}$$
$$0 \quad 0 \quad +6a + 9$$
$$\underline{\pm 6a \pm 9}$$
$$0$$

d) $(b^5 \quad - 4b^3 - 13b^2 \quad - 18):(b - 3) = b^4 + 3b^3 + 5b^2 + 2b + 6$

$$\underline{\pm b^5 \mp 3b^4}$$
$$0 \quad +3b^4 - 4b^3 - 13b^2 \quad -18$$
$$\underline{\pm 3b^4 \mp 9b^3}$$
$$0 \quad +5b^3 - 13b^2 \quad -18$$
$$\underline{\pm 5b^3 \mp 15b^2}$$
$$0 \quad +2b^2 \quad -18$$
$$\underline{\pm 2b^2 \mp 6b}$$
$$0 \quad +6b - 18$$
$$\underline{\pm 6b \mp 18}$$
$$0$$

e) $(t^4 - 3t^3 \quad + 6t - 4):(t^2 - 2) = t^2 - 3t + 2$

$$\underline{\pm t^4 \quad \mp 2t^2}$$
$$0 \quad -3t^3 + 2t^2 + 6t - 4$$
$$\underline{\mp 3t^3 \quad \pm 6t}$$
$$0 \quad +2t^2 \quad -4$$
$$\underline{\pm 2t^2 \quad \mp 4}$$
$$0$$

f) $(x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 2x - 3):(x^2 - 2x + 3) = x^2 - 1$

$$\underline{\pm x^4 \mp 2x^3 \pm 3x^2 + 2x - 3}$$
$$0 \quad +0 \quad -x^2 + 2x - 3$$
$$\underline{\mp x^2 \pm 2x \mp 3}$$
$$0$$

g) $(s^5 - 4s^4 + 6s^3 - 4s^2 - 3s):(s^2 - 2s + 3) = s^3 - 2s^2 - s$

$$\underline{\pm s^5 \mp 2s^4 \pm 3s^3}$$
$$0 \quad -2s^4 + 3s^3 - 4s^2 - 3s$$
$$\underline{\mp 2s^4 \pm 4s^3 \mp 6s^2}$$
$$0 \quad -s^3 + 2s^2 - 3s$$
$$\underline{\mp s^3 \pm 2s^2 \mp 3s}$$
$$0$$

h) Dividend und Divisor günstigerweise vorher mit 2 multiplizieren, um diese bruchfrei zu machen:

$$\left(\frac{1}{2} \cdot x^4 - \frac{13}{2} \cdot x^2 + 2x + 1\right):\left(\frac{1}{2} \cdot x^2 + 2x + \frac{1}{2}\right) =$$
$$= (x^4 \quad - 13 \cdot x^2 + 4x + 2):(x^2 + 4x + 1) = x^2 - 4x + 2$$
$$\underline{\pm x^4 \pm 4x^3 \pm x^2}$$
$$0 \quad -4x^3 - 14x^2 + 4x + 2$$
$$\underline{\mp 4x^3 \mp 16x^2 \mp 4x}$$
$$0 \quad +2x^2 + 8x + 2$$
$$\underline{\pm 2x^2 \pm 8x \pm 2}$$
$$0$$

2.187 a) $(3x+4):(x-1)=3+\frac{7}{x-1}$

$$\begin{array}{l} \pm 3x \mp 3 \\ \hline 7 \end{array}$$

b) $(3x+4):(2x+3)=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{2x+3}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2\cdot(2x+3)}$

$$\begin{array}{l} \pm 3x \pm \frac{9}{2} \\ \hline -\frac{1}{2} \end{array}$$

c) $2a \quad :(2a+1)=1-\frac{1}{2a+1}$

$$\begin{array}{l} \pm 2a \pm 1 \\ \hline -1 \end{array}$$

d) $b \quad :(2b+1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot(2b+1)}$

$$\begin{array}{l} \pm b \pm \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{1}{2} \end{array}$$

e) $(3y^4 \quad -2y^3-5y^2-15y):(3y-5)=y^3+y^2-5-\frac{25}{3y-5}$

$$\begin{array}{l} \pm 3y^4 \mp 5y^3 \\ \hline 0 \quad +3y^3-5y^2-15y \\ \quad \pm 3y^3 \mp 5y^2 \\ \hline \quad 0 \quad 0 \quad -15y \\ \qquad \mp 15y \pm 25 \\ \hline \qquad -25 \end{array}$$

f) Dividend und Divisor günstigerweise vorher durch x dividieren:

$(2x^5-7x^4+3x^3-3x^2+9x):(x^2-3x)=$

$(2x^4-7x^3+3x^2-3x+9):(x-3)=2x^3-x^2-3$

$$\begin{array}{l} \pm 2x^4 \mp 6x^3 \\ \hline 0 \quad -x^3+3x^2-3x+9 \\ \quad \mp x^3 \pm 3x^2 \\ \hline \quad \cdots 0 \quad 0 \quad -3x+9 \\ \qquad \mp 3x \pm 9 \\ \hline \qquad 0 \end{array}$$

g) $(8c^4+ \quad 5c+2):(2c+1)=4c^3-2c^2+c+2$

$$\begin{array}{l} \pm 8c^4 \pm 4c^3 \\ \hline 0 \quad -4c^3+5c+2 \\ \quad \mp 4c^3 \mp 2c^2 \\ \hline \quad 0 \quad +2c^2+5c+2 \\ \qquad \pm 2c^2 \pm c \\ \hline \qquad 0 \quad +4c+2 \\ \qquad\quad \pm 4c \pm 2 \\ \hline \qquad\quad 0 \end{array}$$

h) $(9z^3 \quad +2z-1):(3z^2+z+1)=3z-1$

$$\begin{array}{l} \pm 9x^3 \pm 3z^2 \pm 3z \\ \hline 0 \quad -3z^2-z-1 \\ \quad \mp 3z^2 \mp z \mp 1 \\ \hline \quad 0 \end{array}$$

i) $(d^5 \quad +8d^2+3d+6):(d+2)=d^4-2d^3+4d^2+3$

$$\begin{array}{l} \pm d^5 \pm 2d^4 \\ \hline 0 \quad -2d^4 \quad +8d^2+3d+6 \\ \quad \mp 2d^4 \mp 4d^3 \\ \hline \quad 0 \quad +4d^3+8d^2+3d+6 \\ \qquad \pm 4d^3 \pm 8d^2 \\ \hline \qquad 0 \quad +3d+6 \\ \qquad\quad \pm 3d \pm 6 \\ \hline \qquad\quad 0 \end{array}$$

j) Dividend und Divisor günstigerweise vorher mit 2 multiplizieren, um diese bruchfrei zu machen:

$$\left(2x^3+\frac{3}{2}\cdot x-1\right):\left(x^2+\frac{x}{2}+1\right)=$$

$=(4x^3 \quad +3x-2):(2x^2+x+2)=2x-1$

$$\begin{array}{l} \pm 4x^3 \pm 2x^2 \pm 4x \\ \hline 0 \quad -2x^2-x-2 \\ \quad \mp 2x^2 \mp x \mp 2 \\ \hline \quad 0 \end{array}$$

2.187 k) $(h^4 \qquad + 4h^2):(2h^2 - 4h + 8) = \frac{1}{2} \cdot h^2 + h + 2 - \frac{16}{2h^2 - 4h + 8} =$

$$\begin{array}{l} \underline{\pm h^4 \mp 2h^3 \pm 4h^2} \\ 0 \; + 2h^3 \; + 0 \\ \quad \underline{\pm 2h^3 \mp 4h^2 \pm 8h} \\ \quad 0 \quad + 4h^2 - 8h \\ \qquad \underline{\pm 4h^2 \mp 8h \pm 16} \\ \qquad 0 \quad + 0 \quad - 16 \end{array}$$

$$= \frac{h^2}{2} + h + 2 - \frac{8}{h^2 - 2h + 4}$$

l) $(-4x^4 + 2x^3 \qquad + x + 3):\left(x^2 + \frac{1}{2}\right) =$

$$\begin{array}{l} \underline{\mp 4x^4 \qquad \mp 2x^2} \\ 0 \; + 2x^3 + 2x^2 + x + 3 \\ \quad \underline{\pm 2x^3 \qquad \pm x} \\ \quad 0 \quad + 2x^2 \qquad + 3 \\ \qquad \underline{\pm 2x^2 \qquad \pm 1} \\ \qquad 0 \qquad\quad + 2 \end{array}$$

$$= -4x^2 + 2x + 2 + \frac{2}{x^2 + \frac{1}{2}} = -4x^2 + 2x + 2 + \frac{4}{2x^2 + 1}$$

2.188 a) $x^2 + x + 1$

b) $x - 1$

c) $t^2 - t + 1$

d) $t^2 + t + 1 + \frac{2}{t - 1}$

e) $a^3 + 3a^2 + 9a + 27$

f) $x + \frac{x}{x^2 - 1}$

g) $k^3 + k + \frac{k + 1}{k^2 - 1} = k^3 + k + \frac{1}{k - 1}$

h) $3s - 1$

i) $x^3 + x^2 + 3x$

j) $b^2 + 3b + 1$

k) $5t - 8 + \frac{20t - 8}{t^2 + 2t - 1}$

l) $2s^4 - 2s^2 + 6 - \frac{7}{s^2 + 1}$

2.189 N(x) ist das gesuchte Polynom:

$$\frac{2x^2 - 7x + 5}{N(x)} = 2x - 1 + \frac{2}{N(x)} \quad \Big| \cdot N(x)$$

$$2x^2 - 7x + 5 = (2x - 1) \cdot N(x) + 2$$

$$2x^2 - 7x + 3 = (2x - 1) \cdot N(x)$$

$$N(x) = \left(2x^2 - 7x + 3\right) : (2x - 1)$$

$$N(x) = 2x - 1$$

2.190 a) 15 : 1 b) 12,5 : 1 c) 1 : 2,5 d) 1 : 15 e) 100 : 1
f) 1 : 70 g) 1 : 4 h) 1 : 7,5 i) 2 : 1

2.191 a) 100 : 1 b) 10000 : 1 c) 100 : 1 d) 100 : 1
e) 1000 : 1 f) 1000000 : 1 g) 1 : 1 h) 100 :
i) 10 : 1 j) 1000 : 1 k) 1000000 : 1 l) 3,6 : 1

2.192 a) 1 : 200 000 b) 1 : 300 000 c) 1 : 50 d) 1 : 20 e) 1 : 100 f) 1 : 40

2.193 a) falsch b) richtig c) richtig d) falsch

2.194 a) 1 : 2 b) 1 : 4

2.195 a) (3k + b) : (4k + b) b) 3 : 4

2.196 a) 2 : 1 b) 4 : 1

2.197 a) 4 : 1 b) 8 : 1

2.198 a) 1 : 2 b) 1 : 4

2.199 $\frac{210}{297} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}70707$

2.200 a) $\frac{1}{2} = 0{,}5 = \frac{50}{100} = 50\%$ b) $0{,}25 = \frac{25}{100} = 25\%$ c) $0{,}2 = \frac{20}{100} = 20\%$ d) $1:20 = 0{,}05 = 5\%$
e) $1:25 = 0{,}04 = 4\%$ f) 1% g) $0{,}002 = 0{,}2\% = 2‰$ h) $1‰$
i) $\frac{1}{10000} = \frac{0{,}1}{1000} = 0{,}1‰ = \frac{100}{1000000} = 100$ ppm j) $\frac{1}{500000} = \frac{2}{1000000} = 2$ ppm

2.201 $a)\ \frac{1}{100}$ $b)\ \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$ $c)\ \frac{18}{100} = \frac{9}{50}$ $d)\ \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$ $e)\ \frac{100}{100} = 1$ $f)\ \frac{1}{1000}$
$g)\ \frac{4}{1000} = \frac{1}{250}$ $h)\ \frac{0{,}8}{1000} = \frac{1}{1250}$ $i)\ \frac{1}{1000000}$ $j)\ \frac{20}{1000000} = \frac{1}{50000}$

2.202 a) 18 b) 0,8 cm c) 0,36 kg d) 96 Stück e) € 5,40 f) 12 kW
g) 2400 h) 0,6 g i) 0,096 g j) 0,03 g k) 0,00008 g 1) 0,000024 g

2.203 a) $\frac{30\,€}{150\,€} = 0{,}2 = 20\%$ b) $\frac{6\text{ kg}}{300\text{ kg}} = 0{,}02 = 2\%$ c) $\frac{66\text{ V}}{75\text{ V}} = 0{,}88 = 88\%$
d) $\frac{44\text{ kW}}{80\text{ kW}} = 0{,}55 = 55\%$ e) $\frac{4}{5} = 0{,}8 = 80\%$ f) $\frac{5}{4} = 1{,}25 = \frac{125}{100} = 125\%$
g) $\frac{300}{200} = \frac{150}{100} = 150\%$ h) $\frac{1\text{ s}}{3600\text{ s}} = 0{,}000278 = \frac{0{,}278}{1000} = \frac{278}{1\,000\,000} = 0{,}278‰ = 278$ ppm
i) $\frac{3}{2000} = \frac{1{,}5}{1000} = 1{,}5‰$ j) $\frac{0{,}2\text{ mg}}{1000\text{ mg}} = 0{,}2‰ = 200$ ppm
k) $\frac{50\,\mu\text{m}}{1\,000\,000\,\mu\text{m}} = 50$ ppm l) $\frac{30\text{ cm}^3}{500\,000\text{ cm}^3} = \frac{60}{1\,000\,000} = 60$ ppm

2.204 a) 25 % b) 20 %

2.205 Der Grundwert wird mit x bezeichnet. a) 30% von $x = 0{,}30\cdot x = 6\text{ kg} \Rightarrow x = \frac{6\text{ kg}}{0{,}30} = 20$ kg
b) 120% von $x = 1{,}2\cdot x = €\ 4200 \Rightarrow x = €\ 3500$ c) 300% von $x = 3x = 24\text{ cm} \Rightarrow x = 8$ cm
d) 4% von $x = 0{,}04\cdot x = 12\text{ m}^3 \Rightarrow x = 300\text{ m}^3$
e) $2‰$ von $x = 0{,}002\cdot x = 4\text{ ml} \Rightarrow x = 2000\text{ ml} = 2\ l$
f) 8 ppm von $x = 0{,}000\,008\cdot x = 3\,\mu\text{g} \Rightarrow x = 375$ mg

2.206 a) $280\text{ kg}\cdot 1{,}03 = 288{,}4\text{ kg}$ b) $76\text{ dag}\cdot 1{,}2 = 91{,}2\text{ dag}$ c) $€3800\cdot 1{,}05 = €3990$
d) $€500\cdot 1{,}12 = €560$ e) $4\text{ dm}^3\cdot 2 = 8\text{ dm}^3$ f) $4\text{ dm}^3\cdot 3 = 12\text{ dm}^3$
g) $200\text{ V}\cdot 1{,}008 = 201{,}6\text{ V}$ h) $8000\text{ kWh}\cdot 1{,}055 = 8044\text{ kWh}$

2.207 630 : 18000 = 0,035; Steigung = 3,5 %

2.208 x Tonnen Eisen werden gebraucht;
$0{,}72\cdot x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{0{,}72} = 13{,}9$ Tonnen

2.209 $\frac{2{,}4}{60} = 0{,}04 = 4\%$

2.210 $\cdot\frac{18\text{ mm}}{50\,000\text{ mm}} = 0{,}00036 = 0{,}036\%$

2.211 Gewicht des Eisenstücks: $m\cdot g = \rho_{Eisen}\cdot V\cdot g = 7{,}85\text{ kgdm}^{-3}\cdot V\cdot g$;
Gewicht der verdrängten Wassermenge: $m\cdot g = \rho_{Wasser}\cdot V\cdot g = 1\text{ kgdm}^{-3}\cdot V\cdot g =$ Gewichtsverlust;
Prozentueller Gewichtsverlust: $\frac{1}{7{,}85} \approx 0{,}13 = 13\%$.

2.212 Bei doppelter Laufgeschwindigkeit kann eine bestimmte Menge in der halben Zeit gefördert werden. Zeitersparnis daher 50 %.

2.213 20 Tage ... 600 Stück ⇒ 600 : 20 = 30 Stück / Tag
16 Tage ... 600 Stück ⇒ 600 : 16 = 37,5 Stück = 125 % von 30 Stück; Steigerung um 25 %

2.214 $\frac{40}{37{,}5} = 1{,}0667$; Erhöhung um 6,67%.

2.215 $m_{Sauerstoff} = 16 \cdot m_{Wasserstoff}$, $m_{Schwefel} = 32 \cdot m_{Wasserstoff}$,
$m_{Schwefelsäure} = m_{Wasserstoff} + m_{Sauerstoff} + m_{Schwefel} = (1 + 16 + 32) \cdot m_{Wasserstoff} = 49 \cdot m_{Wasserstoff}$;
$$\frac{m_{Sauerstoff}}{m_{Schwefelsäure}} = \frac{16 \cdot m_{Wasserstofff}}{49 \cdot m_{Wasserstofff}} = \frac{16}{49} = 0{,}3265 = 32{,}7\%$$
$$\frac{m_{Schwefel}}{m_{Schwefelsäure}} = \frac{32 \cdot m_{Wasserstofff}}{49 \cdot m_{Wasserstofff}} = \frac{32}{49} = 0{,}6531 = 65{,}3\%$$

2.216 Anfangspreis: p_0; Zwischenpreis: $p_1 = 1{,}15 \cdot p_0$;
Endpreis: $p_2 = 0{,}85 \cdot p_1 = 0{,}85 \cdot 1{,}15 \cdot p_0 = 0{,}9775 \cdot p_0$
Endpreis $p_2 = 97{,}75\%$ vom ursprünglichen Preis

2.217 $U_{1977} = 0{,}97 \cdot U_{1996}$; $U_{1998} = 1{,}06 \cdot U_{1997} = 1{,}06 \cdot 0{,}97 \cdot U_{1996} .= 1{,}0282 \cdot U_{1977}$;
Steigerung gegenüber dem ursprünglichen Umsatz U_{1997} daher 2,82 %

2.218 $c = \frac{0{,}040}{70 \cdot 0{,}68} \approx 0{,}00084 = 0{,}8‰$

2.219 a) A ... 20000 Teile ... 3% Ausschuss: 600 Teile;
B ... 12000 Teile ... 5% Ausschuss: 600 Teile;
von 32000 Teilen sind 1200 Teile Ausschuss: 1200/32000 = 3,75 %

b) $p\% = \frac{\frac{3}{100} \cdot x_A + \frac{5}{100} \cdot x_B}{x_A + x_B}$; $x_A = x_B : p\% = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{100} + \frac{5}{100}\right)$ d.h. arithmetisches Mittel der Ausschussanteile

2.220 Stromverbrauch im ersten Jahr: v; Stromverbrauch im 2. Jahr: 1,04·v; Stromverbrauch im dritten Jahr: 1,1·1,04·v;
Stromverbrauch im zweiten und dritten Jahr zusammen: 1,04·v + 1,1·1,04·v = 2,184·v.
Dagegen bei 7%–iger gleichbleibender Zunahme gegenüber dem V orjahr:
1,07·v + 1,07·1,07·v = 2,2149·v.
Demnach unterschiedliche Verbrauchszunahme!

2.221

n	$1{,}05^n$	$1{,}1^n$
1	1,05	1,10
2	1,10	1,21
3	1,16	1,33
4	1,22	1,46
5	1,28	1,61
6	1,34	1,77
7	1,41	1,95
8	1,48	2,14
9	1,55	
10	1,63	
11	1,71	
12	1,80	
13	1,89	
14	1,98	
15	2,08	

a) nach 15 Jahren
b) nach 8 Jahren

2.222 20 % von € 40 sind € 32; y = 40·e + 20·s + 32·v

3 Numerisches Rechnen

3.1	a) 0,48	b) –0,1	c) 2	d) 0,06	e) 0,21	f) 20	g) 0,12
	h) 0,025	i) 10	j) 15	k) 0,2	i) 0,4	m) 0,04	n) 8
	o) 9	p) 14	q) 12	r) 50	s)2	t) 0,25	
3.2	a) 0,22	b) –0,12	c) 1,26	d) 0,066	e) 0,021	f) 0,0166	
	g) 0,216	h) 0,018	i) 6,15	j) 21,5	k) 0,05	1) 14	
	m) 0,0145	n) 32	o) 3,2	p) 300			
3.3	a) 0,8r	b) 0,2x	c) 0,1x	d) 0,96x	e) 0		
	f) –0,9s	g) 0,09p	h) 0,01 k	i) –0,8x			
3.4	a) 432,3	b) 48,20	c) –0,01	d) 4860	e) 82500	f) 344000	
3.5	a) 3	b) 3,1	c) 3,14	d) 3,142			
3.6	a) $3\cdot 10^8$ m/s	b) $3{,}0\cdot 10^8$ m/s	c) $3{,}00\cdot 10^8$ m/s	d) $2{,}998\cdot 10^8$ m/s			
3.7	a) 6	b) 2,2	c) 0,17				
3.8	a) [2,25; 2,35[	b) [0,115; 0,125[	c)] –4,25; –4,15]	d) [1,5; 2,5[			
	e) [1,95; 2,05[	f) [1,995; 2,005[	g) [0,1095; 0,1105[				
	h) $[1{,}225\cdot 10^2; 1{,}235\cdot 10^2[$	i) $[1{,}15\cdot 10^2; 1{,}25\cdot 10^2[$	j) $[1{,}195\cdot 10^2; 1{,}205\cdot 10^2[$				
3.9	a) zwei	b) vier	c) zwei	d) zwei	e) drei		
	f) drei	g) drei	h) zwei	i) drei	j) vier		
3.10	a) 270	b) 7500	c) 2	d) 1200	e) 20	f) 75	
	g) 200	h) 320	i) 1	j) 2	k) 200	1) 1	
3.11	a) 4	b) 7	c) 5	d) 5	e) 20	f) 20	
	g) 2000	h) 0,5	i) 0,1	j) 1	k) 2	1) 3	
	m) 0,2	n) 1	o) 1000				
3.12	a) 34	b) 34,5	c) 15,4	d) 480,4	e) 287,5		
	f) 0,02	g) 72,4	h) 0,825	i) 0,08	j) $\sqrt{5,76}$		
	k) $\sqrt{324}$	l) $\sqrt{7,29}$	m) $\sqrt{9,61}$	n) $\sqrt{0,0441}$	o) $\sqrt[3]{2,744}$		
3.13	a) 15	b) 1	c) 10	d) 1	e) 0,4	f) 0,7	
	g) 4	h) 1	i) 0,2	j) 0,25	k) 0,5	l) 2	
3.14	a) $28\cdot 10^2 = 2800$	b) $8\cdot 10^{-4} = 0{,}0008$	c) $5\cdot 10^{-4} = 0{,}0005$				
	d) $20\cdot 10^0 = 20$	e) $1\cdot 10^3 = 1000$	f) $6\cdot 10^0 = 6$				
3.15	a) $2\cdot 10^4 = 20000$	b) $2\cdot 10^{-1} = 0{,}2$	c) $0{,}5\cdot 10^2 = 50$				
	d) $1\cdot 10^{-3} = 0{,}001$	e) $0{,}5\cdot 10^2 = 50$	f) $0{,}7\cdot 10^2 = 70$				
	g) $7\cdot 10^{-2} = 0{,}07$	h) $4\cdot 10^1 = 40$	i) $0{,}5\cdot 10^0 = 0{,}5$				
	j) $4\cdot 10^1 = 40$	k) $1\cdot 10^{-4} = 0{,}0001$	l) $15\cdot 10^{-1} = 1{,}5$				
3.16	a) $9\cdot 10^{-4} = 0{,}0009$	b) $7\cdot 10^{-3} = 0{,}007$	c) $3\cdot 10^{-5} = 0{,}00003$				
	d) $30\cdot 10^{-2} = 0{,}3$	e) $9\cdot 10^4 = 90000$	f) $4\cdot 10^1 = 40$				
3.17	a) 3 b) 5	c) 6	d) 0,4	e) 0,3	f) 1	g) 0,1	
3.18	a) 0,02	b) 0,8	c) 12	d) 0,25			
	e) 0,5	f) 3	g) 0,025	h) 0,01			

3.19 a) 360 kg b) 150 kg

3.20 6000 Tonnen Erde

3.21 $3 \cdot 10^{14}$ km

3.22 $3 \cdot 10^{108}$ Atome

3.23		Eine mögliche Überschlagsrechnung	Gerechnet
	a)	$\approx 30 - 20 - 2 = 8$	6,5
	b)	$\approx -80 + 110 - 20 = 10$	5,8
	c)	$\approx 50 - 5 - 20 + 5 = 30$	24,5
	d)	$\approx 0{,}3 - 1 - 1 + 2{,}5 = 0{,}8$	0,809
	e)	$\approx 1000 + 2000 - 400 = 2600$	2900
	f)	$\approx 0{,}01 + 0{,}04 + 0{,}2 = 0{,}25$	0,248

3.24		Eine mögliche Überschlagsrechnung	Gerechnet (gerundet)
	a)	$\approx (5 + 3) \cdot 40 = 8 \cdot 40 = 320$	288
	b)	$\approx 25 - 1 \cdot (400 - 100) = 25 - 300 = -275$	–249
	c)	$\approx -0{,}5 \cdot (2 - 6) \cdot 1 = 2$	1,69
	d)	$\approx (3 - 1) \cdot (100 + 200) = 600$	763
	e)	$\approx 4 - 9 \cdot (-3) - 2 \cdot 10 = 4 + 27 - 20 = 11$	11,0
	f)	$\approx 0{,}02 + 0{,}003 - 5 \cdot 0{,}004 \approx 0{,}02 + 0 - 0{,}02 = 0$	0,00370

3.25		Eine mögliche Überschlagsrechnung	Gerechnet (gerundet)
	a)	$\approx \frac{800 \cdot 70}{50} = \frac{5600}{5} \approx \frac{5500}{5} = 1100$	1200 oder $1{,}2 \cdot 10^3$
	b)	$\approx \frac{200}{400 \cdot 100} = \frac{1}{200} = \frac{5}{1000} = 0{,}005$	0,0060
	c)	$\approx \frac{2 \cdot 1}{1} \cdot 20 = 40$	50
	d)	$\approx \frac{40}{20} \cdot \frac{30 \cdot 50}{40 \cdot 10} = \frac{1500}{200} = \frac{15}{2} \approx 8$	9,6
	e)	$\approx \frac{-5}{3} \cdot \frac{9}{-7} \cdot \frac{2}{10} \approx \frac{10}{20} = 0{,}5$	0,38
	f)	$\approx \frac{1}{5} \cdot \frac{30000}{0{,}5 \cdot 100} \cdot \frac{1}{25} \approx \frac{30000}{50 \cdot 100} = \frac{30}{5} = 6$	7,0

3.26		Eine mögliche Überschlagsrechnung	Gerechnet (gerundet)
	a)	$\approx \frac{400+200}{100} = 6$	5,22
	b)	$\approx \frac{50}{8-2} = \frac{50}{6} \approx 8$	8,26
	c)	$\approx \frac{40-20}{2 \cdot 10} = \frac{20}{30} \approx 0{,}7$	0,926
	d)	$\approx \frac{2 \cdot 0{,}05}{12-10} = \frac{0{,}1}{2} \approx 0{,}05$	0,0197
	e)	$\approx \frac{1-0{,}2}{50+200} = \frac{0{,}8}{250} = \frac{0{,}8 \cdot 4}{250 \cdot 4} = \frac{3{,}2}{1000} \approx 0{,}003$	0,00335
	f)	$\approx \frac{-3}{-4} = 0{,}75$	0,823
	g)	$\approx \frac{10-12+80}{1200} \approx \frac{80}{1000} \approx 0{,}08$	0,0625

3.26	h)	$\approx \frac{2}{8-18+20} = \frac{2}{10} \approx 0{,}2$	0,147
	i)	$\approx \frac{200-600+900}{700+900+300} \approx \frac{500}{2000} = \frac{1}{4} = 0{,}25$	0,242
	j)	$\approx 20 \cdot 6 - 10 \cdot 3 = 90$	97,9
	k)	$\approx 5 \cdot \frac{20}{15} - 20 \cdot \frac{2}{10} \approx 7 - 4 = 3$	4,41
	l)	$\approx 1 - \frac{5}{500} \approx 1 - 0 = 1$	0,990

3.27 a) 1,283 b) 0,167 c) 2,917

3.28 a) 0,40 b) 40,33 c) 6,53 d) 14,33 e) 4,34 f) –5,13

3.29 a) 7,65 b) 11,74 c) 1,58 d) 14,66

3.30 a) 729 b) 8788 c) 12866 d) 1740 e) 34,68 f) 3,978

3.31 a) 366,7 b) 64,68 c) 0,6186 d) 3,144 e) 0,03262 0,2521

3.32 a) 31,51 b) 10,49 c) 2,60 d) 0,15

3.33 $\frac{\Delta x}{a} \approx \frac{\Delta x}{x} = \frac{2\text{ m}}{1683\text{ m}} = 0{,}0012 = 0{,}12\,\%$; $\frac{\Delta x}{b} \approx \frac{\Delta x}{x} = \frac{1\text{ m}}{542\text{ m}} = 0{,}0018 = 0{,}18\,\%$

Der Fehler von b ist größer, d.h. ist die Messung von a ist relativ genauer und damit besser erfolgt.

3.34 Stromstärke I : (maximaler) relativer Fehler : $\frac{0{,}5\text{ A}}{145\text{ A}} = 0{,}0034 = 0{,}34\%$;

Spannung U: (maximaler) relativer Fehler : $\frac{5\text{ V}}{225\text{ A}} = 0{,}0222 = 2{,}22\%$.

Die Messung der Stromstärke ist relativ genauer und damit besser erfolgt.

3.35 Mindestfüllmenge: $1000\text{ g} - 0{,}008 \cdot 1000\text{ g} = 992\text{ g}$;
Höchstfüllmenge: $1000\text{ g} + 0{,}008 \cdot 1000\text{ g} = 1008\text{ g}$;

3.36 a) $3{,}73 \approx 3{,}7$ b) $4{,}847 \approx 4{,}85$ c) $0{,}9154 \approx 0{,}92$
d) $0{,}105 + 0{,}0023 = 0{,}1073 \approx 0{,}107$ e) $2840 + 432{,}1 = 3272{,}1 \approx 3272$
f) $0{,}04782 + 0{,}00824 - 0{,}428 = -0{,}37194 \approx -0{,}372$

3.37 a) 2,0 cm + 4,2 cm = 6,2 cm b) 5,24 cm + 42 cm 47,24 cm ≈ 47 cm
c) 5,88 kg + 0,248 kg = 6,128 kg ≈ 6,13 kg
d) 12,4 dag + 3,52 dag = 15,92 dag ≈ 15,9 dag
e) $88{,}4\text{ cm}^2 + 0{,}62\text{ cm}^2 = 89{,}02\text{ cm}^2 = 89{,}0\text{ cm}^2$
f) $3{,}41\text{ dm}^3 + 0{,}412\text{ dm}^3 + 0{,}089\text{ dm}^3 = 3{,}911\text{ dm}^3 \approx 3{,}91\text{ dm}^3$

3.38 a) $108{,}1 \approx 110$ (besser: $1;1 \cdot 10^2$) b) $0{,}62976 \approx 0{,}63$ c) $40{,}7277 \approx 41$
d) $96{,}82 \approx 96{,}8$ e) $161{,}082 \approx 161$ f) $2{,}2572 \approx 2{,}3$

3.39 a) 2,6 b) 2,39 c) 36800 oder $3{,}86 \cdot 10^4$ d) 14400 oder $1{,}44 \cdot 10^4$
e) 4,4 f) 0,0095 g) 0,0332 h) 46

3.40 a) 0,38 b) 2 c) 7,93 d) 56
e) 4,5 f) 0,049 g) 7,3 h) 6,6 i) 4,1

3.41 a) 1,846 b) 8,7 c) 4,5 d) 7,78

3.42 a) $24429{,}0\ldots\ \text{mm}^3 \approx 2{,}4\cdot 10^4\ \text{mm}^3 = 24\ \text{cm}^3$ b) $4071{,}5\ \text{mm}^2 \ldots \approx 4{,}1\cdot 10^3\ \text{mm}^2 = 41\text{cm}^2$

3.43 0,87 kg

3.44 34,8 mm

3.45 d Kreisdurchmesser: $\dfrac{\frac{3}{4}\cdot d^2 - \frac{\pi}{4}\cdot d^2}{\frac{\pi}{4}\cdot d^2} = \dfrac{3-\pi}{\pi} = -0{,}0451 = -4{,}51\%$

3.46 Größtmöglicher Wert des Flächeninhalts: $108{,}3\ \text{m}\cdot 72{,}4\ \text{m} \approx 7841\ \text{m}^2$;
kleinstmöglicher Wert der Fläche : $108{,}1\ \text{m}\cdot 72{,}2\ \text{m}\ \approx 7805\ \text{m}^2$

3.47 Größtmöglicher Wert der Leistung. $216\ \text{V}\cdot 0{,}0486\ \text{A} \approx 10{,}5\ \text{W}$;
Kleinstmöglicher Wert der Leistung: $208\ \text{V}\cdot 0{,}0482\ \text{A} \approx 10{,}0\ \text{W}$

3.48 $T \approx 1{,}8\ \text{s}$

3.49 a) $65\ \text{min} = \frac{65}{60}$ Stunden; mittlere Geschwindigkeit: $\dfrac{85}{65/60}\dfrac{\text{km}}{\text{h}} = 78{,}46\ldots\ \text{km/h} \approx 78\ \text{km/h}$

b) (1) „Halbe Einheit": Kleinstmögliche mittlere Geschwindigkeit: $\dfrac{84{,}5}{65{,}5/60}\ \text{km/h} = 77{,}4\ \text{km/h}$

Größtmögliche mittlere Geschwindigkeit : $\dfrac{85{,}5}{64{,}5/60}\ \text{km/h} = 79{,}5\ \text{km/h}$

"Ganze Einheit": Kleinstmögliche mittlere Geschwindigkeit: $\dfrac{84}{66/60}\ \text{km/h} = 76{,}4\ \text{km/h}$

Größtmögliche mittlere Geschwindigkeit: $\dfrac{86}{64/60}\ \text{km/h} = 80{,}6\ \text{km/h}$

(2) $s = 85\ \text{km}\cdot(1 \pm 0{,}03) = (85 \pm 2{,}55)\ \text{km}$; $t = 65\ \text{min}\cdot(1 \pm 0{,}01) = (65 \pm 0{,}65)\ \text{min}$;

Kleinstmögliche mittlere Geschwindigkeit: $\dfrac{82{,}45}{65{,}65/60}\ \text{km/h} = 75{,}4\ \text{km/h}$

Größtmögliche mittlere Geschwindigkeit: $\dfrac{87{,}55}{64{,}35/60}\ \text{km/h} = 81{,}6\ \text{km/h}$

3.50 v ... wirkliche Geschwindigkeit, v_T ... vom Tacho angezeigte Geschwindigkeit;
$v = (62 \pm 2)\ \text{km/h}$, $v = v_T(1 \pm 0{,}08)$; $v_{T\,min} = \dfrac{60}{1{,}08}\ \text{km/h} \approx 56\ \text{km/h}$, $v_{T\,max} = \dfrac{64}{0{,}92}\ \text{km/h} \approx 70\ \text{km/h}$

4 Elementare Geometrie

4.1 a) A_1 A_2 A_3

$A_1 = 180 \cdot 20 = 3600;$
$A_2 = 20 \cdot 105 = 2100;$
$A_3 = 90 \cdot 25 = 2250;$

$A = A_1 + 2 \cdot A_2 + 2 \cdot A_3 = 12300\ \text{mm}^2 = 1{,}23\ \text{dm}^2$

b) A_1 A_2 A_3 A_4

$A_1 = 60 \cdot 18 = 1080$
$A_2 = 20 \cdot 74 = 1480$
$A_3 = 20 \cdot 10 = 200$
$A_4 = 120 \cdot 18 = 2160;$

$A = A_1 + A_2 + 2 \cdot A_3 + A_4 = 5120\ \text{mm}^2 = 51{,}2\ \text{cm}^2$

4.2 a) 60° b) 90° c) 150° d) 130° e) 156°

4.3 Großer Zeiger: 6° ; kleiner Zeiger: 0,5°

4.4

	a)	b)	c)	d)	e)
komplementärer Winkel	78°	55,1°	45°	17,6°	10°
supplementärer Winkel	168°	145,1°	135°	107,6°	100°

4.5 a) 50^g b) $1{,}1^g$ c) $66{,}7^g$ d) $111{,}1^g$ e) 200^g f) 300^g

4.6 a) 45° b) 0,9° c) 18° d) 90° e) 180° f) 225°

4.7 $\alpha = \frac{12}{32} \cdot 360° = 135°$ ... um 135°

4.8 a) 318° b) 18° c) 110° d) 65° e) 20° f) 110°

4.9 a) $\alpha = 28°$, $\beta = 152°$ b) $\alpha = 138°$, $\beta = 42°$ c) $\alpha = 325°$, $\beta = 60°$ d) $\alpha = 40°$, $\beta = 140°$ e) $\alpha = 50°$, $\beta = 15°$

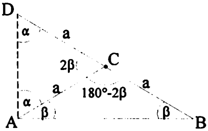
4.10 a) Keine Symmetrieachsen b) die Diagonalen e und f
c) die Diagonale e d) keine Symmetrieachsen

4.11 Mindestens zwei spitze Winkel; einen rechten Winkel

4.12 a) $\alpha = 45°$; $\beta = 45°$ b) $\alpha = 40°$; $\beta = 50°$ c) $\alpha = 30°$; $\beta = 60°$

4.13 a) $\varepsilon = 30°$; $\varphi = 60°$; $\delta = 60°$ b) $\delta = 30°$ c) $\varphi = 65°$

4.14



Gleichschenkliges Dreieck ABC:
$\angle BAC = \beta$; $\angle ACB = 180° - 2\beta$ (Winkelsumme = 180°);
Gleichschenkliges Dreieck ACD:
$\angle ADC = \alpha$; $\angle DCA = 2\beta$ (supplementär zu $\angle ACB$);
Winkelsumme: $\alpha + \alpha + 2\beta = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 90°$

4.15 a) Kongruenz   b) Kongruenz   c) keine Kongruenz

4.16 a) $\alpha = 47°$, $\beta = 104°$, $\gamma = 29°$ b) $b = 7$ cm, $c = 4{,}1$ cm, $\beta = 94°$ c) $c = 4{,}7$ cm, $\alpha = 49°$, $\gamma = 61°$ d) nicht konstruierbar   e) $c = 3{,}4$ cm, $\beta = 70°$, $\gamma = 40°$ f) $a = 5{,}3$ cm, $\beta = 38°$, $\gamma = 102°$

4.17 $A = 24\ cm^2$; $h = 4{,}0$ cm; $A = \cdot c \cdot h/2 \Rightarrow$ Seite $c = 12{,}0$ cm

4.18 $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$; in allen drei Fällen gleiche Grundlinie g und gleiche Höhe.h

4.19 $A = 35 \cdot cm \cdot 48\ cm / 2 = 840\ cm^2$

4.20 a) $s = \dfrac{a+b+c}{2} = 6{,}5$

$s - a = 2{,}3$; $s - b = 1{,}5$; $s - c = 2{,}7$

$A = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} = 7{,}8\,cm^2$

Höhe = 2 · Fläche / Seite

$h_a = 3{,}7\,cm$; $h_b = 3{,}1\,cm$; $h_c = 4{,}1\,cm$;

b) $s = \dfrac{a+b+c}{2} = 35{,}05$

$s - a = 17{,}75$; $s - b = 10{,}55$; $s - c = 6{,}75$

$A = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} = 210\,cm^2$

$h_a = 24{,}3\,cm$; $h_b = 17{,}2\,cm$; $h_c = 14{,}9\,cm$;

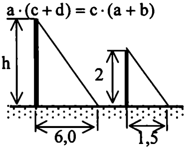
4.21

a	b	c	d	e	f	a : d	b : e	c : f
8	10	14	12	15	21	2 : 3	2 : 3	2 : 3
8	12	14	20	30	35	2 : 5	2 : 5	2 : 5
4	4	8	3	3	6	4 : 3	4 : 3	4 : 3

4.22 Produkt der Innenglieder = Produkt der Aussenglieder :

$a \cdot (c+d) = c \cdot (a+b)$ $a \cdot c + a \cdot d = a \cdot c + b \cdot c \rightarrow a \cdot d = b \cdot c \rightarrow a : b = c : d$

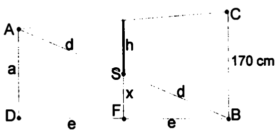
4.23



a) $h : 6 = 2 : 1{,}5 \Rightarrow h = 8{,}0$ m   b) ja

4.24 $x : 5{,}0 = 6{,}8 : 4{,}0 \Rightarrow x = 8{,}5$ m; $y : 5{,}0 = 9{,}3 : 4{,}0 \Rightarrow y = 11{,}6$ m

4.25



Nach Voraussetzung ist $\overline{DF} = \overline{FB} = e$.
2. Strahlensatz (Strahlen von B):
$a : x = 2e : e \Rightarrow x = a/2 = 80$ cm;
1. Strahlensatz (Strahlen von B):
$\overline{AS} : \overline{SB} = e : e \Rightarrow \overline{AS} = \overline{SB} = d$.
2. Strahlensatz (Strahlen von A):
$h : 170\ cm = d : 2d \Rightarrow h = 170\ cm/2 = 85$ cm

4.26 $F : 4000 = 3{,}0 : 8{,}0 \Rightarrow F = 1500N$

4.27 $x : 32 = 1 : 10 \Rightarrow x = 3{,}2$ mm

4.28 Siehe Beispiel 4.8, Seite 129, im Lehrbuch. $\overline{AB} = 9$ cm. Hilfsstrahl von A aus, darauf Punkte C und D derart, dass die Strecke AC und die Strecke CD a) in 7 bzw. 3 b) in 2 bzw. 3 d) in 1 bzw. 3 gleich lange Teilstrecken geteilt sind. c) AC und CD sind gleich lang.

4.29 Siehe Beispiel 4.8, Seite 129, im Lehrbuch. Hilfsstrahl mit a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 gleich langen Strecken.

4.30 $x : 2{,}54\text{ cm} = (c + d) : c \Rightarrow x = 3{,}81\text{ cm}$

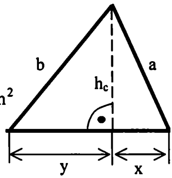
4.31 $x : 50 = 45 : 135 \Rightarrow x = 16{,}67\text{ m} \approx 17\text{ m}$; $y : 50 = 90 : 135 \Rightarrow y = 33{,}33\text{ m} \approx 33\text{ m}$

4.32 a) $x = \sqrt{a^2 - h_c^2} = 3{,}00\text{ cm}$ b) $x = \sqrt{b^2 - h_a^2} = 2{,}60\text{cm}$

$y = \sqrt{b^2 - h_c^2} = 4{,}47\text{ cm}$ $y = \sqrt{c^2 - h_a^2} = 6{,}22\text{cm}$

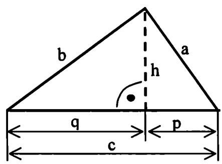
$A = (x+y)\cdot\frac{h_C}{2} = 14{,}94\text{ cm}^2 \approx 15\text{ cm}^2$ $A = (x+y)\cdot\frac{h_a}{2} = 28{,}67\text{cm}^2$

$\approx 29\text{ cm}^2$

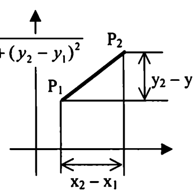


4.33

a	b	c	p	q	h	A
8	9	12,0	5,3	6,7	6,0	36,0
8	8,9	12	5,3	6,7	6,0	35,8
6	6,7	9,0	4	5,0	4,5	20,1
10	13,3	16,7	6,0	10,7	8	66,7
10	8,0	12,8	7,8	5,0	6,2	40
5,4	6	8,0	3,6	4,5	4	16,1
17,0	6	18,0	16,0	2	5,7	50,9
8,9	4,5	10	8	2,0	4,0	20,0
8,4	5,5	10	7,0	3	4,6	22,9
5,3	4,6	7,0	4	3	3,5	12,1
6,4	8,0	10,3	4	6,3	5	25,6
8,0	6,4	10,3	6,3	4	5	25,6



$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

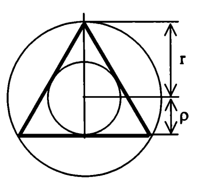


4.34

a)		b)		c)	
a =	4,24	a =	5,00	a =	6,71
b =	3,16	b =	2,00	b =	3,61
c =	4,00	c =	5,39	c =	5,83
u =	11,40	u =	12,39	u =	16,14

4.35 $h = \frac{a}{2}\cdot\sqrt{3}$ (siehe Beispiel 4.11, Seite 133, im Lehrbuch);

$\rho = \frac{1}{3}\cdot h = \frac{a}{6}\cdot\sqrt{3}$; $r = \frac{2}{3}\cdot h = \frac{a}{3}\cdot\sqrt{3}$

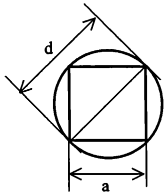


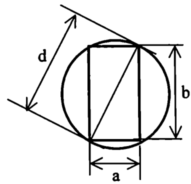
4.36 a) $d = a\sqrt{2} \Rightarrow a = \dfrac{30}{\sqrt{2}} \approx 21\ \text{cm}$

b) $d^2 = a^2 + b^2;\ a = 5x;\ b = 7x$

$900 = 74x^2 \Rightarrow x = 3{,}4874:$

$a = 17\ \text{cm};\ b = 24\ \text{cm}$

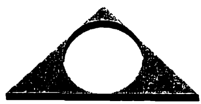


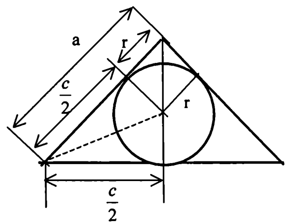


4.37 $a = \frac{c}{2} \cdot \sqrt{2};\quad \frac{c}{2} + r = a$

$r = \frac{c}{2} \cdot \sqrt{2} - \frac{c}{2} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2} \cdot c = 0{,}207\,c = 2{,}485$

$d = 2r = 4{,}97\ \text{cm} \approx 5{,}0\ \text{cm}$



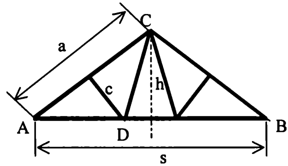


4.38 $x = a \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 1{,}41\ \text{m};\quad y = a \cdot \sqrt{2} = 2{,}83\ \text{m}$

4.39 Ähnliche Dreiecke : $\Delta ABC \sim \Delta ACD$ .... $s : h = a : c$

$a = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + h^2} = 8{,}50\ \text{m};\quad c = \dfrac{a \cdot h}{s} = 2{,}27\ \text{m}$

$b = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + c^2} = 4{,}82\ \text{m}$



4.40 $l_4 : 3{,}6 = 3 : 9 \Rightarrow l_4 = 1{,}20\ \text{m}$

$l_5 : 3{,}6 = 6 : 9 \Rightarrow l_5 = 2{,}40\ \text{m}$

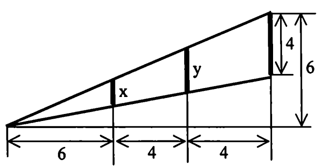
$l_1 = \sqrt{3^2 + l_4^2} = 3{,}23\ \text{m}$

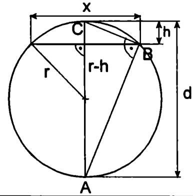
$l_2 = l_3 = l_6 = l_1$

$l_7 = \sqrt{3^2 + l_5^2} = 3{,}84\ \text{m}$

4.41 $x : 4 = 6 : 14 \Rightarrow x = 1{,}71\ \text{m}$

$y : 4 = 10 : 14 \Rightarrow y = 2{,}86\ \text{m}$



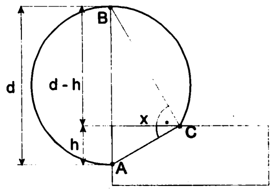


4.42 Höhensatz im rechtwinkeligen Dreieck ABC:

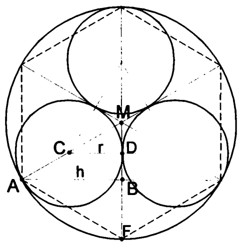
$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = h \cdot (d - h);\quad x = 2 \cdot \sqrt{h \cdot (d - h)} = 47\ \text{mm}$

Oder: $\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = r^2 - (r - h)^2 \Rightarrow x = 47\ \text{mm}$

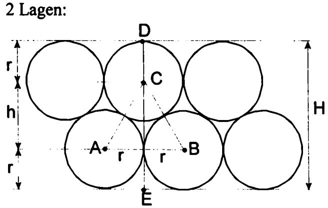
4.43 Satz von Thales ⇒ Dreieck ABC ist rechtwinklig;
Höhensatz: $x^2 = h \cdot (d-h)$; $x = \sqrt{h \cdot (d-h)} = 60$ mm



4.44 R Radius des äußeren Kreises, r Radius der inneren Kreise; $d = 2R$; $x = 2r$.
Dreieck MAF gleichseitig mit der Seitenlänge R und der Höhe $h = \frac{R}{2} \cdot \sqrt{3}$. Die Dreiecke MAB und MCD sind ähnlich (auch 2. Strahlensatz) ⇒ $h : r = R : (R-r)$ oder
$\frac{R}{2} \cdot \sqrt{3} : r = R : (R-r)$; $\frac{R}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot (R-r) = R \cdot r$,
$R \cdot \sqrt{3} = (2+\sqrt{3}) \cdot r \Rightarrow r = \frac{R \cdot \sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = R \cdot \left(2 \cdot \sqrt{3} - 3\right)$.
$x = 2R \cdot \left(2 \cdot \sqrt{3} - 3\right) = d \cdot \left(2 \cdot \sqrt{3} - 3\right) = 46{,}4$ mm.

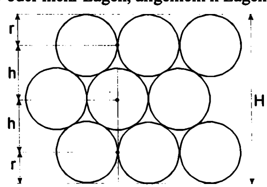


4.45 2 Lagen:



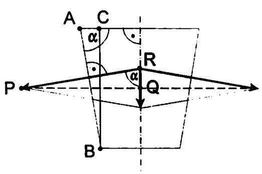
$d = 2r$; das Dreieck ABC ist gleichseitig;
$h = \frac{2r}{2}\sqrt{3} = r\sqrt{3}$;
$H = r + h + r = 2r + r \cdot \sqrt{3} = d \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}\right] =$
$= 74{,}6$ cm.

3 oder mehr Lagen, allgemein n Lagen

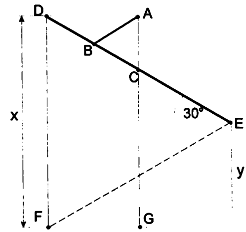


3 Lagen: $H = r + 2h + r$;
4 Lagen: $H = r + 3h + r$;
n Lagen: $H = r + (n-1) \cdot h + r =$
$= 2r + (n-1) \cdot r\sqrt{3} =$
$= d \cdot \left[1 + \frac{n-1}{2} \cdot \sqrt{3}\right]$

4.46 Die Winkel CAB und QRP sind als Normalenwinkel gleich; daher haben die rechtwinkligen Dreiecke ABC und PQR gleich große Winkel und sind aus diesem Grunde ähnlich.
$\overline{PQ} = 60$ N; $\overline{AC} = 3$ cm; $\overline{AB} = \sqrt{3^2 + 24^2}$
$60 : 3 = F_N : \overline{AB} \Rightarrow F_N = \frac{\sqrt{3^2+24^2}}{3} \cdot 60 = 484$ N



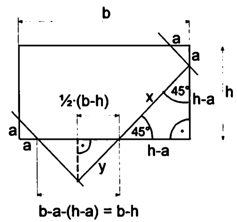
4.47 D bewegt sich auf einer waagrechten Geraden auf Höhe von A. Denn A hat eine feste Höhe und das Dreieck DBA ist bei jeder Lage des Garagentors gleichschenklig. x = 220 cm stets, gleich der Länge $\overline{DE}$ des Garagentors ($\overline{DE} = \overline{AG}$!).
Neigung des Garagentors um 30°: Dreieck FED ist gleichseitig $\Rightarrow$ y = x/2 = 110 cm.



4.48 e = x + y (siehe Abbildung), wobei x und y Hypotenusen in rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecken sind; daher ist $x^2 = (h-a)^2 + (h-a)^2$ oder $x = (h-a)\cdot\sqrt{2}$. Entsprechend ist $y = \frac{1}{2}(b-h)\cdot\sqrt{2}$.
Damit:

$$e = x + y = \frac{b+h-2a}{2}\cdot\sqrt{2} = 146{,}4 \text{ mm};$$

$$A = b\cdot h - 2a^2 = 116 \text{ cm}^2.$$



4.49 Rechtwinkliges Dreieck ABC:

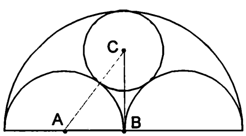
$$\overline{AB} = \frac{R}{2},\ \overline{BC} = R - r,\ \overline{AC} = \frac{R}{2} + r;$$

$$\left(\frac{R}{2}\right)^2 + (R-r)^2 = \left(\frac{R}{2} + r\right)^2$$

$$\frac{R^2}{4} + R^2 - 2Rr + r^2 = \frac{R^2}{4} + Rr + r^2$$

$$R^2 - 2Rr = +Rr$$

$$R^2 = 3Rr \Rightarrow r = \frac{R}{3}$$



4.50 Die rechtwinkligen Dreiecke ABC und BDC haben eine gemeinsame Kathete BC.

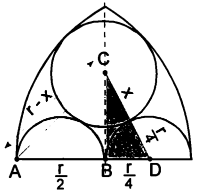
$$\overline{BC}^2 = (r-x)^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2,\ \overline{BC}^2 = \left(\frac{r}{4} + x\right)^2 - \left(\frac{r}{4}\right)^2 \Rightarrow$$

$$(r-x)^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \left(\frac{r}{4} + x\right)^2 - \left(\frac{r}{4}\right)^2;$$

$$r^2 - 2rx + x^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{r^2}{16} + \frac{r\,x}{2} + x^2 - \frac{r^2}{16}$$

$$-2rx + \frac{3r^2}{4} = \frac{r\,x}{2}$$

$$3r^2 = 10\,r\cdot x \quad \text{oder} \quad r = \frac{3}{10}\cdot R$$



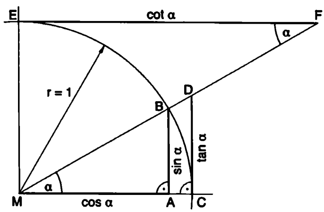
4.51 a) $\frac{h}{m}$ b) $\frac{h}{m}$ c) $\frac{v}{h}$ d) $\frac{v}{h}$ e) $\frac{v}{n}$ f) $\frac{h}{u}$ g) $\frac{h}{u}$ h) $\frac{v}{n}$ i) $\frac{u}{m}$ j) $\frac{h}{n}$

4.52 a) φ b) φ c) δ d) φ e) ε f) ω g) ω h) δ

4.53 a) $\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ b) $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta$ c) $\cot\alpha = \frac{b}{a} = \tan\beta$

d) $\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ e) $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$

4.54



4.55 a) wahr b) wahr c) falsch d) wahr e) falsch

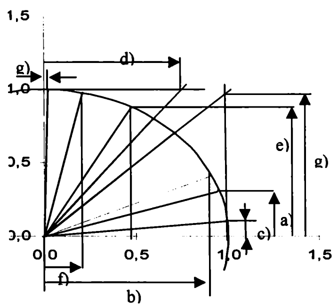
4.56 $\sin 30° = \frac{\frac{c}{2}}{c} = \frac{c}{2c} = \frac{1}{2}$; $\sin 45° = \frac{a}{c} = \frac{a}{a\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$; $\sin 60° = \frac{h}{c} = \frac{\frac{c}{2}\cdot\sqrt{3}}{c} = \frac{c\cdot\sqrt{3}}{2c} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$

$\cos 30° = \frac{h}{c} = \frac{\frac{c}{2}\cdot\sqrt{3}}{c} = \frac{c\cdot\sqrt{3}}{2c} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$; $\cos 45° = \frac{a}{c} = \frac{a}{a\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$; $\cos 60° = \frac{\frac{c}{2}}{c} = \frac{c}{2c} = \frac{1}{2}$

$\tan 30° = \frac{\frac{c}{2}}{h} = \frac{\frac{c}{2}}{\frac{c}{2}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}$; $\tan 45° = \frac{a}{a} = 1$; $\tan 60° = \frac{h}{\frac{c}{2}} = \frac{\frac{c}{2}\cdot\sqrt{3}}{\frac{c}{2}} = \sqrt{3}$

4.57

a) 0,5563 b) 0,8310 c) 0,2199
d) 4,5483 e) 0,9998 f) 0,9998
g) 1,9883 h) 0,3172



4.58 a) 17,9° b) 24,2° c) 5,7° d) 53,0° e) 61,3° f) 77,9° j) 44,5° h) 88,8°

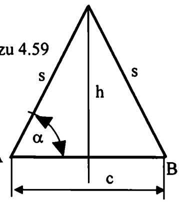
4.59 $c = 48\,\text{cm}\,;\quad \alpha = 55°;\quad \cos\alpha = \dfrac{\frac{c}{2}}{s} \Rightarrow s = \dfrac{c}{2\cdot\cos\alpha} = 41{,}8\ \text{cm}$

$\tan\alpha = \dfrac{h}{\frac{c}{2}} \Rightarrow h = \dfrac{c}{2}\cdot\tan\alpha = 34{,}3\ \text{cm} \approx 34\ \text{cm}$

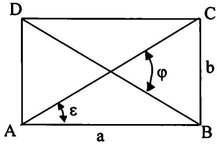
$u = c + 2s = 131{,}6\ \text{cm} \approx 132\ \text{cm}\,;$

$A = \dfrac{c}{2}\cdot h = 822{,}6\ \text{cm}^2 \approx 823\ \text{cm}^2$

zu 4.59



zu 4.60

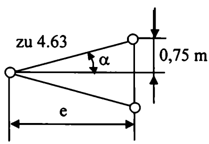


4.60 $\tan\varepsilon = \dfrac{b}{a} \Rightarrow \varepsilon = 32{,}74°\,;\quad \varphi = 2\varepsilon = 65{,}5°$

4.61 $\tan\alpha = 0{,}14 \Rightarrow$ Steigungswinkel $\alpha = 7{,}97° \approx 8{,}0°$

4.62 $1:200 = 0{,}5:100\,;\quad \tan\alpha = 0{,}005 \Rightarrow \alpha \approx 0{,}3°$
Steigung ... 0,5 % ; Steigungswinkel ... 0,3°

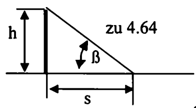
zu 4.63



4.63 $\alpha = \dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{60}\right)^0 = 0{,}008333°\,;$

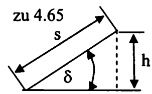
$\tan\alpha = \dfrac{0{,}75}{e} \Rightarrow e = \dfrac{0{,}75}{\tan\alpha} = 5156{,}6\ \text{m} \approx 5{,}2\ \text{km}$

zu 4.64



4.64 $h = 8\ \text{m}\,;\ s = 12{,}5\ \text{m}\,;\quad \tan ß = \dfrac{h}{s} \Rightarrow ß = 32{,}6°$
Höhenwinkel der Sonne .. 32,6°

zu 4.65



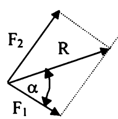
4.65 $s = 300\ \text{m}\,;\ \delta = 70°\,;\ \sin\delta = \dfrac{h}{s} \Rightarrow h = s\cdot\sin\delta \approx 282\ \text{m}$

4.66 $F_1 = 1{,}18$ kN; $F_2 = 2{,}25$ kN

$\tan\alpha = \dfrac{F_2}{F_1} \Rightarrow \alpha = 62{,}3°$

$\cos\alpha = \dfrac{F_1}{R} \Rightarrow R = \dfrac{F_1}{\cos\alpha} \approx 2{,}54$ kN

zu 4.66 und 4.67

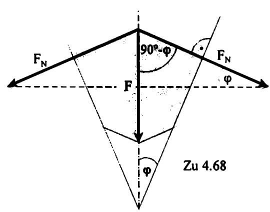


4.67 $R = 6{,}3$ kN; $\alpha = 32°$; $\cos\alpha = \dfrac{F_1}{R} \Rightarrow F_1 = R\cdot\cos\alpha \approx 5{,}3$ kN; $\sin\alpha = \dfrac{F_2}{R} \Rightarrow F_2 = R\cdot\sin\alpha = 3{,}3$ kN

4.68 $\alpha = 2\cdot\varphi;\ \sin\varphi = \dfrac{F/2}{F_N} \Rightarrow$ a) $F_N = \dfrac{F}{2\cdot\sin\varphi}$.

b) $\alpha = 25°;\ \varphi = 12{,}5°$: $F_N = \dfrac{1{,}2\ \text{kN}}{2\cdot\sin 12{,}5°} = 2{,}8$ kN

c) $\alpha = 10°;\ \varphi = 5°$: $F_N = \dfrac{1{,}2\ \text{kN}}{2\cdot\sin 5°} = 6{,}9$ kN



Zu 4.68

4.69 $A = \dfrac{12\cdot 9}{\cos 48°} \approx 161{,}4\ \text{m}^2$

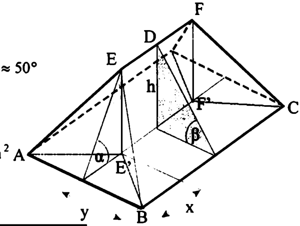
4.70 $h = 6\,\text{m}\,;\; x = \frac{15-10}{2} = 2{,}5\,\text{m}\,;\; y = 5\,\text{m}$

$\tan\alpha = \frac{h}{x} \Rightarrow \alpha = 67{,}38° \approx 67°;\quad \tan\beta = \frac{h}{y} \Rightarrow \beta = 50{,}19° \approx 50°$

$\Delta ABE': A_1' = 5 \cdot 2{,}5 = 12{,}5 \Rightarrow A_1 = \frac{A_1'}{\cos\alpha} \approx 32{,}5\ \text{m}^2$

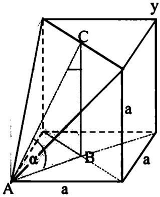
$BCF'E': A_2' = (15+10)\cdot\frac{5}{2} = 62{,}5 \Rightarrow A_2 = \frac{A_2'}{\cos\beta} \approx 97{,}6\ \text{m}^2$

Dachfläche $= 2\cdot A_1 + 2\cdot A_2 = 260{,}3\ \text{m}^2$



4.71 $\overline{AB} = \frac{a}{2}\cdot\sqrt{2}\,;\; \overline{BC} = a$

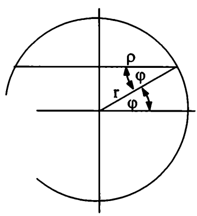
$$\tan\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{a}{\frac{a}{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow \alpha = 54{,}7°$$



4.72 Radius des Parallelkreises ... ρ
Umfang Äquator .. 2π·r·
Umfang des Parallelkreises .. 2π·ρ

$$2\rho\pi = r\pi \Rightarrow \rho = \frac{r}{2}$$

$$\cos\varphi = \frac{\rho}{r} = \frac{\frac{r}{2}}{r} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60°$$



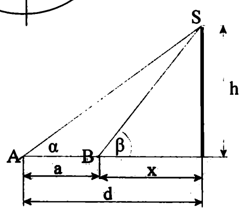
4.73 $a = 5\,;\ \alpha = 23{,}4°\,;\ \beta = 31{,}8°$

$\tan\alpha = \frac{h}{a+x} \Rightarrow h = (a+x)\cdot\tan\alpha$

$\tan\beta = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x\cdot\tan\beta$

$(a+x)\cdot\tan\alpha = x\cdot\tan\beta;\quad x = \frac{a\cdot\tan\alpha}{\tan\beta - \tan\alpha}$

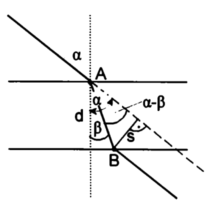
$h = x\cdot\tan\beta = \frac{a\cdot\tan\alpha\cdot\tan\beta}{\tan\beta-\tan\alpha};\quad h = 7{,}2\ \text{m}$



4.74 $\overline{AB} = x\,;\; \cos\beta = \frac{d}{x} \Rightarrow x = \frac{d}{\cos\beta}$

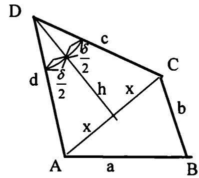
$\sin(\alpha-\beta) = \frac{s}{x} \Rightarrow s = x\cdot\sin(\alpha-\beta)$

$s = \frac{d\cdot\sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta} \approx 14{,}5\ \text{mm}$



4.75 a) $\alpha = 120°$; b) $\varepsilon = 125°$; c) $\alpha = 80°$; d) $\varphi = 38°$ e) $\delta = 50°$

4.76 Δ ACB ... gleichschenklig



$\sin\frac{\delta}{2}=\frac{x}{d} \Rightarrow x=d\cdot\sin\frac{\delta}{2}=2{,}01\,\text{cm}$

$\cos\frac{\delta}{2}=\frac{h}{d} \Rightarrow h=d\cdot\cos\frac{\delta}{2}=2{,}87\,\text{cm}$

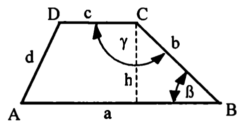
$A_1(ACD)=x\cdot h=5{,}76\,\text{cm}^2;\quad \overline{AC}=e=2x=4{,}02\text{ cm}$

Heronsche Flächenformel für ΔABC:

$s=\frac{a+b+e}{2}=8{,}01;\ s-a=0{,}61;\ s-b=3{,}41;\ s-e=3{,}99$

$A_2(ABC)=\sqrt{8{,}01\cdot0{,}61\cdot3{,}41\cdot3{,}99}=8{,}14\text{ cm}^2;\quad A=A_1+A_2=13{,}98\text{ cm}^2$

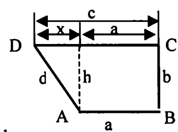
4.77 a) $a=9$ dm; $b=5$ dm; $c=3{,}2$ dm; $\gamma=120°$



$\beta=180°-\gamma=60°;\ \sin\beta=\frac{h}{b}\Rightarrow h=b\cdot\sin\beta=4{,}33\,\text{dm}$

$A=\frac{(a+c)\cdot h}{2}=26{,}4\text{ dm}^2$

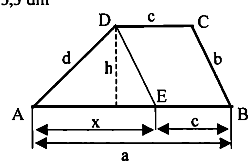
b) $a=5{,}1$ dm; $c=7$ dm; $d=3{,}5$ dm; $\beta=90°$



$x=c-a=1{,}9\text{ dm};\ h=\sqrt{d^2-x^2}=2{,}94\text{ dm}$

$A=\frac{(a+c)\cdot h}{2}=17{,}8\text{ dm}^2$

c) $a=6$ dm; $b=3{,}5$ dm; $c=2{,}7$ dm; $d=4{,}2$ dm; $x=a-c=3{,}3$ dm



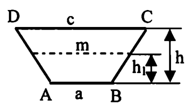
$A_1=\Delta$ AED; mit der Heron'schen Formel:

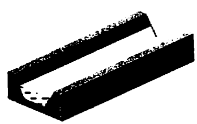
$s=\frac{b+d+x}{2}=5{,}5;\ s-b=2;\ s-d=1{,}3;\ s-x=2{,}2$

$A_1=\sqrt{5{,}5\cdot2\cdot1{,}3\cdot2{,}2}=5{,}61\text{ dm}^2 \Rightarrow h=\frac{2\cdot A_1}{x}=3{,}40\text{ dm}$

$A_2=(EBCD)=c\cdot h=9{,}18\text{ dm}^2;\quad A=A_1+A_2=14{,}8\text{dm}^2$

4.78 $a=2{,}5$ m; $c=7{,}0$ m; $h=3{,}8$ m



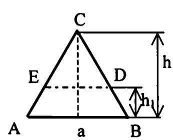


$h_1=\frac{h}{2}=1{,}9\text{ m};\quad m=\frac{a+c}{2}=4{,}75\text{ m}$

$A=\frac{(a+c)\cdot h}{2}=18{,}05\text{ m}^2$

$A_1=\frac{(a+m)\cdot h_1}{2}=6{,}89\,\text{m}^2;.\ A_1\approx38\%\text{ von A}$

4.79 $a=42{,}0\,\text{cm};\ h=\frac{a}{2}\cdot\sqrt{3}=36{,}37\text{ cm};\ h_1=\frac{h}{3}=12{,}12\text{ cm}$



$m=\overline{DE};\ m:a=2:3 \Rightarrow m=\frac{2}{3}\cdot a=28{,}0\text{ cm}$

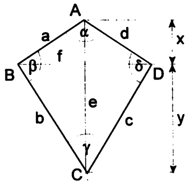
$A_{Trapez}=\frac{(a+m)\cdot h_1}{2}=424{,}35\text{ cm}^2$

Anders: Rest $=\Delta(EDC)$; $A_{Dreieck}:A_{Rest}=9:4$

$A_{Dreieck}=\frac{a^2}{4}\cdot\sqrt{3}=763{,}83;\ A_{Rest}=339{,}48 \Rightarrow A_{Trapez}\approx424\text{ cm}^2$

4.80 e ... Symmetrieachse

geg.: a = d = 12,0 cm ; b = c = 21,0 cm ; $\alpha = 100°$



$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{f}{2}}{a} \Rightarrow \frac{f}{2} = 9{,}193\,\text{cm};\ \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{x}{a} \Rightarrow x = 7{,}713\,\text{cm}$$

$$y = \sqrt{b^2 - \left(\frac{f}{2}\right)^2} = 18{,}881\,\text{cm};\ e = x + y = 26{,}595\ \text{cm}$$

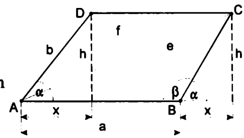
$$A = \frac{e \cdot f}{2} \approx 244\ \text{cm}^2$$

4.81 $\alpha + \beta = 180°;\quad \sin\alpha = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \cdot \sin\alpha;\ \cos\alpha = \frac{x}{b} \Rightarrow x = b \cdot \cos\alpha$

$$x = \sqrt{b^2 - h^2};\quad e = \sqrt{(a+x)^2 + h^2};\ f = \sqrt{(a-x)^2 + h^2};\quad A(ABCD) = a \cdot h$$

a) a = 8 dm ; b = 5 dm ; f = 6 dm

A_1 = Fläche ΔABD; mit der Heronschen Formel:



$$s = \frac{a+f+b}{2} = 9{,}5;\ s-a = 1{,}5;\ s-b = 4{,}5;\ s-f = 3{,}5$$

$$A_1 = \sqrt{9{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot 4{,}5 \cdot 3{,}5} = 14{,}98\ \text{dm}^2 \Rightarrow h = \frac{2 \cdot A_1}{a} = 3{,}75\ \text{dm}$$

$$A(ABCD) = 2 \cdot A_1 = 30{,}0\ \text{dm}^2;\quad x = 3{,}31\,\text{dm};\ e = 11{,}92\,\text{dm}$$

b) $b = 10$ dm; $e = 14$ dm; $\beta = 110{,}0°$

$\alpha = 70°$; $h = 9{,}40$ dm; $x = 3{,}42$ dm; $a + x = \sqrt{e^2 - h^2} = 10{,}37$ dm $\Rightarrow a = 6{,}96$ dm

$f = 10{,}04$ dm; $A(ABCD) = 65{,}4\ \text{dm}^2$

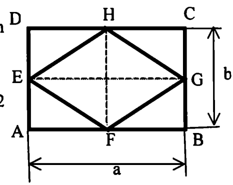
c) a = 9dm ; b = 5dm ; $\alpha = 70{,}0°$; h = 4,7 dm

$A(ABCD) = 42{,}3\,\text{dm}^2$; $x = 1{,}71$dm ; $e = 11{,}70$dm ; $f = 8{,}67$dm

d) a = 12 dm ; b = 7 dm ; h = 5 dm

x = 4,9 dm ; e = 17,62 dm ; f = 8,68 dm

$A(ABCD) = 60{,}0\ \text{dm}^2$



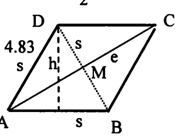
zu 4.82

4.82 EFGH .... Rhombus : $s = \overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH} = \overline{EH}$

$$a = 8\ \text{cm};\ b = 5\ \text{cm};\ s = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = 4{,}72\ \text{cm};\quad u = 4s = 18{,}87\ \text{cm};\ A = \frac{a \cdot b}{2} = 20{,}00\ \text{cm}^2$$

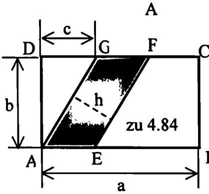
4.83 Dreieck ABD ... gleichseitig : $s = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = \overline{BD}$

zu 4.83



$$h = \frac{s}{2} \cdot \sqrt{3};\ e = 2h = s \cdot \sqrt{3};\quad A = 2 \cdot \frac{s^2}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{s^2}{2} \cdot \sqrt{3}$$

4.84 $a = 312$ m; $b = 211$ m; $c = 104$ m; $h = 93$ m



$$\overline{EG} = d = \sqrt{b^2 + c^2} = 235{,}24\ \text{m}$$

$$A(ABCD) = a \cdot b = 65832\ \text{m}^2$$

$$A(AEFG) = d \cdot h = 21877{,}32\ \text{m}^2$$

$A(AEFG) \approx 33\%$ von $A(ABCD)$

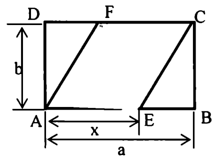
4.85 $a = 6$ dm; $b = 3$ dm; $x = \overline{AE} = \overline{EC}$

$x^2 = (a-x)^2 + b^2 \Rightarrow x^2 = a^2 - 2a \cdot x + x^2 + b^2 \Rightarrow$

$x = \dfrac{a^2+b^2}{2a} = 3{,}75$ dm; $A_{ABCD} = a \cdot b = 18\ \text{dm}^2$

$A_{AECF} = x \cdot b = 11{,}25\ \text{dm}^2$

Schnittabfall: $A_{ABCD} - A_{AECF} = 6{,}75\ \text{dm}^2$

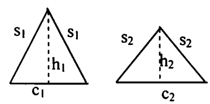


4.86 $c_1 = \frac{4}{5} = 0{,}8$ m; $h_1 = 0{,}5$ m; $s_1^2 = \left(\frac{c_1}{2}\right)^2 + h_1^2 = 0{,}64\ \text{m}^2$

$c_2 = 1$ m; $s_2 = s_1 \Rightarrow h_2^2 = s_2^2 - \left(\frac{c_2}{2}\right)^2$

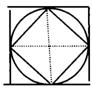
$s_2 = s_1 \Rightarrow h_2 = \sqrt{\left(\frac{c_1}{2}\right)^2 + h_1^2 - \left(\frac{c_2}{2}\right)^2} = 0{,}40$

Neue Höhe: 0,80 m



4.87 Rechteck : $A_R = a \cdot b = 158{,}4\ \text{m}^2$; Quadrat : $A_Q = s^2 \Rightarrow s = 12{,}59$ m (geometrisches Mittel)
$u_R = 2a + 2b = 51{,}8$ m ; $u_Q = 4s = 50{,}34$; $u_R : u_Q = 51{,}8 : 50{,}34 = 1 : 0{,}97$

4.88 $A_{ein} = 2 \cdot r^2$; $A_{um} = 4 \cdot r^2$ .... Flächen wie 1 : 2



4.89 a) Winkelsumme = $3 \cdot 180° = 540°$; $\beta = 180° - 80° = 100°$
$\delta = 540° - (2 \cdot 90° + 100° + (180° - 38°)) = 118°$

b) Winkelsumme = $5 \cdot 180° = 900°$; $\gamma = (900° - (110° + 2 \cdot 120° + 130°)) : 3 = 140°$

4.90 a) $A_{ABEF} = 200 \cdot 80 = 16000$

$A_{BCDE} = \dfrac{200+90}{2} \cdot 200 = 29000$

$A_{Gesamt} = 45000\ \text{mm}^2 = 450\ \text{cm}^2$

b) $A_{ABCG} = \dfrac{90+60+50}{2} \cdot 90 = 9000$

$A_{GDEF} = 90 \cdot 90 = 8100$

$A_{Gesamt} = 17100\ \text{mm}^2 = 171\ \text{cm}^2$

c) $\alpha = 22{,}5°$; $\tan\alpha = \dfrac{x}{120} \Rightarrow$

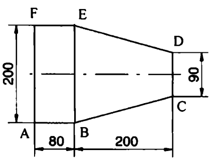
$x = 120 \cdot \tan\alpha = 49{,}71$ mm

$a = 2x + 80 = 179{,}41$ mm

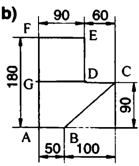
$A_{Gesamt} = (179{,}41 + 80) \cdot 120 \approx$

$\approx 31129\ \text{mm}^2 \approx 311\ \text{cm}^2$

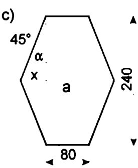
a)



b)



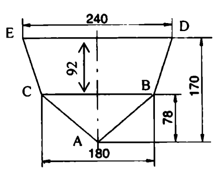
c)



4.91 a) $A_{ABC} = \dfrac{180 \cdot 78}{2} = 7020$

$A_{CBDE} = \dfrac{180+240}{2} \cdot 92 = 19320$

$A_{Gesamt} = 26340\ \text{mm}^2 \approx 263\ \text{cm}^2$

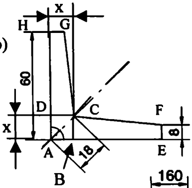


4.91 b) $x = \frac{18}{2} \cdot \sqrt{2} = 12{,}73$; $A_{ABCD} = x^2 = 162$

$A_{BEFC} = \frac{x+8}{2} \cdot (60 - x) = 489{,}93$

$A_{Gesamt} = A_1 + 2 \cdot A_2 = 1141{,}8\,\text{mm}^2 \approx 11{,}4\ \text{cm}^2$

zu b)



c) $c = \overline{BD} = \sqrt{290^2 + 460^2} = 543{,}78$

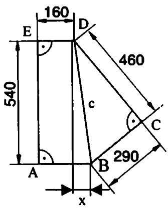
$x = \sqrt{c^2 - 540^2} = 64{,}03$

$A_{ABDE} = \frac{160 + x + 160}{2} \cdot 540 \approx 103688$

$A_{BCD} = \frac{290 \cdot 460}{2} = 66700$

$A_{Gesamt} = A_1 + A_2 = 170388\,\text{mm}^2 \approx 1704\,\text{cm}^2$

zu c)



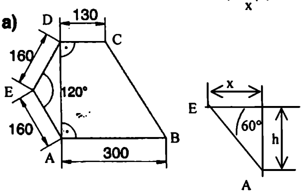
4.92 a) $h = \frac{\overline{AE}}{2} \cdot \sqrt{3} = 138{,}56$; $x = \frac{\overline{DE}}{2} = 80$

$A_{ABCD} = \frac{300+130}{2} \cdot 2 \cdot h \approx 59583$

$A_{ADE} = x \cdot h = 11085$

$A_{Gesamt} = A_1 + A_2 = 70668\ \text{mm}^2 \approx 707\ \text{cm}^2$

a)

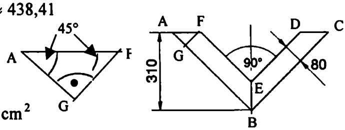


b) $\overline{GF} = \overline{AG} = 80$; $\overline{AB} = \overline{BC} = a = 310 \cdot \sqrt{2} \approx 438{,}41$

$\overline{FE} = \overline{ED} = a - 2 \cdot 80 \approx 278{,}41$

$A_{ABEF} = \frac{\overline{AB} + \overline{FE}}{2} \cdot 80 = 28672{,}5$

$A_{Gesamt} = 2 \cdot 28672{,}5 \approx 57345\ \text{mm}^2 \approx 573\ \text{cm}^2$



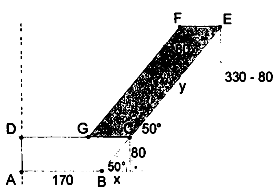
c) A_1 = Flächeninhalt des Trapezes ABCD;
A_2 = Flächeninhalt des Parallelogramms CEFG;
$A_{Gesamt} = 2 \cdot (A_1 + A_2)$;

$\tan 50° = \frac{80}{x} \Rightarrow x = \frac{80}{\tan 50°} = 67{,}13$ mm;

$A_1 = \frac{170+(170+x)}{2} \cdot 80 = 16285\ \text{mm}^2$;

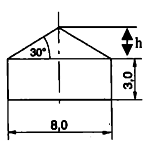
$\sin 50° = \frac{330-80}{y} \Rightarrow y = \frac{250}{\sin 50°} = 326{,}35$ mm;

$A_2 = y \cdot 80 = 26108\ \text{mm}^2$;
$A_{Gesamt} = 84787\ \text{mm}^2 \approx 848\ \text{cm}^2$



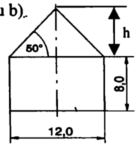
4.93 a) $\tan 30° = \frac{h}{4} \Rightarrow h = 4 \cdot \tan 30° \approx 2{,}31$ m

$A = 8 \cdot 3 + 4h \approx 33{,}2\ \text{m}^2$

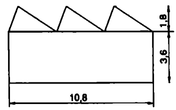


4.93 b) $\tan 50° = \frac{h}{6} \Rightarrow h = 6 \cdot \tan 50° \approx 7{,}15$ m

zu b)



zu c)



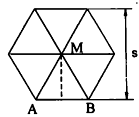
$A = 12 \cdot 8 + 6h \approx 138{,}9 \text{ m}^2$

c) $A = 10{,}8 \cdot 3{,}6 + \frac{10{,}8 \cdot 1{,}8}{2} = 10{,}8 \cdot 4{,}5 = 48{,}6 \text{ m}^2$

4.94 a) $e = s \cdot \sqrt{2}$

b) Das Dreieck ABM ist gleichseitig mit der Seite $\frac{e}{2}$ und der Höhe $\frac{s}{2}$;

$\frac{s}{2} = \frac{e}{4} \cdot \sqrt{3} \Rightarrow e = \frac{2s}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot s$



4.95 Gleichs. Dreieck: $A = \frac{s^2}{4}\sqrt{3} \Rightarrow s = \sqrt{\frac{4A}{\sqrt{3}}} \approx 11{,}77$ cm ; $u = 3s = 35{,}3$ cm

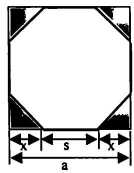
Quadrat: $A = s^2 \Rightarrow s = \sqrt{A} \approx 7{,}75$cm ; $u = 4s = 31{,}0$ cm

regelm. Sechseck: $A = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot s^2 \Rightarrow s = \sqrt{\frac{2A}{3 \cdot \sqrt{3}}} \approx 4{,}81$cm ; $u = 6s = 28{,}8$ cm

4.96 a ... Quadratseite ; s ...Seite des regelm. 8-Ecks

$x = \frac{s}{2} \cdot \sqrt{2};\ 2x + s = a \Rightarrow s = \frac{a}{\sqrt{2}+1};\ x = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot (\sqrt{2}+1)} = \frac{a}{2+\sqrt{2}}$

$A_{\text{Wegfall}} = 2x^2 = \frac{2a^2}{(2+\sqrt{2})^2} = \frac{a^2}{3+2 \cdot \sqrt{2}} = 0{,}17 \cdot a^2$... Wegfall = 17%



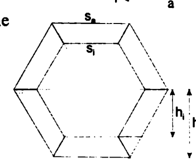
4.97 Ein Sechseck zerfällt in 6 gleichseitige Dreiecke; ist s die Seite und h die Höhe eines solchen Dreiecks, so gilt:

$h = \frac{s}{2} \cdot \sqrt{3};\ s = \frac{2h}{\sqrt{3}};\ A_{\text{Sechseck}} = 6 \cdot \frac{h \cdot s}{2} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot s^2$

$s_a = 82$ cm ; $A_a = 17469{,}5 \text{ cm}^2$; $h_a = 71{,}01$ cm

$h_i = h_a - 8 = 63{,}01$ cm; $s_i = 72{,}76$ cm

$A_i = 13755{,}2 \text{ cm}^2 \approx 138 \text{ dm}^2$



4.98 $\sin 15° = \frac{s}{2r} \Rightarrow \frac{s}{2} = r \cdot \sin 15°$

$\cos 15° = \frac{h}{r} \Rightarrow h = r \cdot \cos 15°$

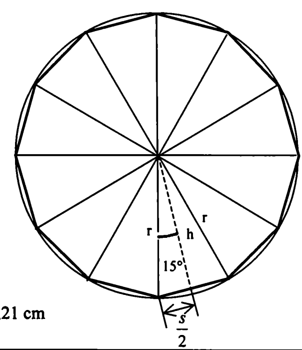
$A(ABM) = \frac{s \cdot h}{2} = r^2 \cdot \sin 15° \cdot \cos 15°$

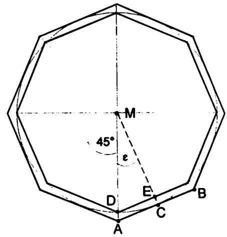
$A_{12\text{-Eck}} = 12 \cdot r^2 \cdot \sin 15° \cdot \cos 15°$

$A_{n\text{-Eck}} = n \cdot r^2 \cdot \sin \frac{\pi}{n} \cdot \cos \frac{\pi}{n} = \frac{n}{2} \cdot r^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{n}$

$432 = 12 \cdot r^2 \cdot \sin 15° \cdot \cos 15° \Rightarrow$

$r = \sqrt{\frac{432}{12 \cdot \sin 15° \cdot \cos 15°}} = 12$ cm; $s = 2 \cdot r \cdot \sin 15° = 6{,}21$ cm





4.99 $\varepsilon = 22{,}5°$; $\overline{MC} = r$; $\tan\varepsilon = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{MC}} \Rightarrow \overline{AC} = r\cdot\tan\varepsilon$

Fläche Dreieck ABM : $\overline{AC}\cdot r = r^2\cdot\tan\varepsilon$

$A_{um} = 8\cdot r^2\cdot\tan\varepsilon = 477\ \text{cm}^2$

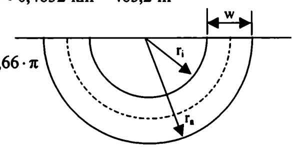
$\sin\varepsilon = \dfrac{\overline{DE}}{r} \Rightarrow \overline{DE} = r\cdot\sin\varepsilon$; $\cos\varepsilon = \dfrac{\overline{ME}}{r} \Rightarrow \overline{ME} = r\cdot\cos\varepsilon$

Fläche Dreieck CDM : $r^2\cdot\sin\varepsilon\cdot\cos\varepsilon$

$A_{ein} = 8\cdot r^2\cdot\sin\varepsilon\cdot\cos\varepsilon = 407\ \text{cm}^2$

4.100 $u = 60\pi \approx 188{,}50$ cm; 1 min ... $720\cdot 188{,}50$ cm $= 135716{,}8$ cm $\Rightarrow$ 1 sec ... 2262 cm $\approx 22{,}6$ m

4.101 $u = 2\cdot 6370\cdot\pi \approx 40024$ km in 24 h $\Rightarrow$ in 1 sec ... $\dfrac{40024}{24\cdot 3600} \approx 0{,}4632$ km $= 463{,}2$ m



4.102 $b = r\cdot\pi$; $r_a = 10{,}2$ m; $w = 2{,}6$ m; $r_i = 7{,}6$ m

$b_a = 10{,}2\cdot\pi = 32{,}0$ m; $b_i = 7{,}6\cdot\pi = 23{,}9$ m; $u_{Reifen} = 0{,}66\cdot\pi$

Umdrehungen(Aussenrad) $= 10{,}2\pi : 0{,}66\pi = 15{,}5$

Umdrehungen(Innenrad) $= 7{,}6\pi : 0{,}66\pi = 11{,}5$

4.103 Der Umfang verdoppelt, der Flächeninhalt vierfacht sich.

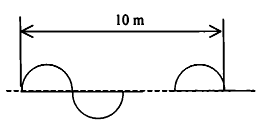
4.104 $d_1 = 40$ cm $\Rightarrow u_1 = 40\pi$; $A_1 = 400\pi$; $d_2 = 30$ cm $\Rightarrow u_2 = 30\pi$; $A_2 = 225\pi$

$\dfrac{u_2 - u_1}{u_1} = \dfrac{30\pi - 40\pi}{40\pi} = -0{,}25 = -25\%$; der Umfang verkleinert sich um 25%.

$\dfrac{A_2 - A_1}{A_1} = \dfrac{225\pi - 400\pi}{400\pi} = -0{,}4375 = -43{,}75\%$; der Flächeninhalt verkleinert sich um 43,75%.

4.105 Beim ursprünglichen Umfang u ist der Radius gleich $\dfrac{u}{2\pi}$; neuer Umfang: u + 1 m; neuer Radius daher: $\dfrac{u+1}{2\pi} = \dfrac{u}{2\pi} + \dfrac{1}{2\pi}$. Der Radius wird um $\dfrac{1}{2\pi}$ m $\approx 0{,}16$ m ≈ 16 cm vergrößert.

Die Vergrößerung hängt nicht vom ursprünglichen Wert des Radius ab! Stets ≈ 16 cm



4.106 d Durchmesser eines Halbkreisbogens

a) $10\text{ m} = 50\cdot d\cdot\pi/2 \Rightarrow d = \cdot\dfrac{2}{5\cdot\pi}\text{ m} = 12{,}7$ cm;

$50\cdot d = \dfrac{20}{\pi}\text{ m} = 6{,}37$ m

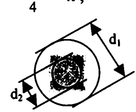
b) $10\text{ m} = 80\cdot d\cdot\pi/2 \Rightarrow d = \cdot\dfrac{1}{4\cdot\pi}\text{ m} = 8{,}0$ cm; $80\cdot d = \dfrac{20}{\pi}\text{ m} = 6{,}37$ m

Die Länge ist unabhängig von der Anzahl der Halbkreisbögen!

4.107 $d_1 = 150$ mm; $d_2 = 50$ mm;

Querschnitt ohne Bohrung: $A_1 = \dfrac{d_1^2}{4}\cdot\pi$; Querschnitt mit Bohrung: $A_2 = \dfrac{d_1^2 - d_2^2}{4}\cdot\pi$;

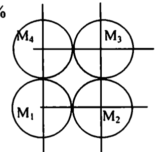
Prozentuelle Verringerung: $\dfrac{A_1 - A_2}{A_1} = \dfrac{d_2^2}{d_1^2} = \dfrac{1}{9} = 0{,}111 = 11{,}1\%$



4.108 $s^2 = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \Rightarrow s = \frac{d}{2} \cdot \sqrt{\pi} \approx 0{,}886\,d$

4.109 s … Quadratseite, d … Kreisdurchmesser; Quadratdiagonale $s \cdot \sqrt{2} = \frac{5}{4} \cdot d \Rightarrow s = \frac{5}{4 \cdot \sqrt{2}} \cdot d$

$A_{\text{Quadrat}} = s^2 \approx \frac{25}{32} \cdot d^2$; proz. Fehler $= \dfrac{\frac{25}{32} \cdot d^2 - \frac{\pi}{4} \cdot d^2}{\frac{\pi}{4} \cdot d^2} = -0{,}0053 = -0{,}53\%$

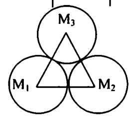


4.110 a) Rest = Quadrat($M_1M_2M_3M_4$) – 4 Viertelkreise (= 1 Kreis)

$$100^2 - \frac{100^2}{4} \cdot \pi = 100^2 \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \approx 2146 \text{ mm}^2$$

b) Rest = gls.Dreieck($M_1M_2M_3$) – 3 Sechstelkreise (= 1 Halbkreis)

$$\frac{100^2}{4} \cdot \sqrt{3} - \frac{100^2}{8} \cdot \pi = 100^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{8}\right) \approx 403 \text{ mm}^2$$

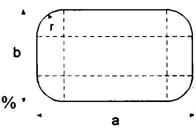


4.111 a) Fläche A: Rechteck (a · b)

Verlust: 4 Quadrate (s = r) – 4 Viertelkreise (= 1 Kreis, Radius r)

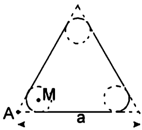
$A = 400 \cdot 240 = 96000 \text{ mm}^2$

Verlust ... $4 \cdot 24^2 - 24^2 \cdot \pi = 24^2 \cdot (4 - \pi) = 494 \text{ mm}^2$; also $\approx 0{,}5\%$



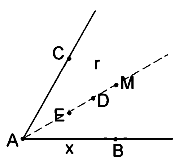
b) Das gleichschenklige Dreieck ABC ist auch gleichseitig.

Auch das Dreick EMC ist gleichschenklig, da $\overline{EM} = r$.
Eine Winkelüberlegung im Dreieck AMC ergibt, dass der Winkel AMC gleich 60° ist. Daher ist auch das gleichschenklige Dreieck EMC gleichseitig. Für seine Höhe $\frac{x}{2}$ gilt $\frac{x}{2} = \frac{r}{2} \cdot \sqrt{3}$ oder $x = r \cdot \sqrt{3}$.



Verlust an einer Ecke: Dreieck ABC - Kreissegment CEBD.
Kreissegment = Drittelkreis (Radius r) - Dreieck BMC.
Das Dreieck BMC hat den gleichen Flächeninhalt wie das gleichseitige Drieick EMC. Verlust an einer Ecke =

$$\frac{x^2}{4} \cdot \sqrt{3} - \left(\frac{1}{3} \cdot \pi r^2 - \frac{r^2}{4} \cdot \sqrt{3}\right) = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) \cdot r^2.$$



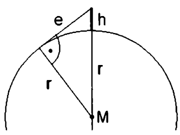
Ursprüngliche Blechfläche: $\frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} = 69282 \text{ mm}^2$;

Gesamtverlust = $\left(3\sqrt{3} - \pi\right) \cdot r^2 = 1183{,}4 \text{ mm}^2$, das sind 1,7%.

4.112 Meridiankreis: $u = 2 \cdot 6370 \cdot \pi = 40023{,}9$ km; 360° = 21600 min;
1 Seemeile = u/21600 = 1,853 km

4.113 $e^2 = (r + h)^2 - r^2 = 2r \cdot h + h^2 = (2r + h) \cdot h$

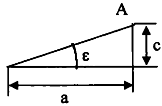
$e = \sqrt{(2r + h) \cdot h} = 22{,}574 \approx 22{,}6$ km



4.114 $\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \gamma = 0{,}5$ Minuten $= 0{,}5 \cdot \frac{1}{60}{}^\circ$; $a = 25\,\text{cm}$

$c = a \cdot \tan\varepsilon = 0{,}0036$ cm

A und B müssen 0,0073 cm = 0,073 mm =73µm auseinander liegen.



4.115 a) $r = 8$ cm; $e = 40$ cm; $l = 2e + 2 \cdot r\pi \approx 130$ cm. Riemenlänge 130 cm

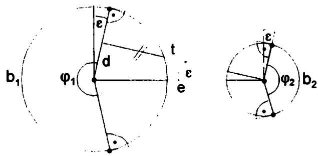
b) $d = 10 - 5 = 5$ cm; $t = \sqrt{e^2 - d^2} = 29{,}58$ cm;

$\sin\varepsilon = \frac{d}{e} \Rightarrow \varepsilon = 9{,}59°$;

$\varphi_1 = 180° + 2\varepsilon = 199{,}19°$;

$\varphi_2 = 180° - 2\varepsilon = 160{,}{,}81°$;

$b_1 = 2\pi \cdot 10 \cdot \frac{\varphi_1}{360°} = 34{,}76$ cm;



$b_2 = 2\pi \cdot 5 \cdot \frac{\varphi_2}{360°} = 14{,}03$ cm cm; $l = b_1 + b_2 + 2 \cdot t = 107{,}96$ cm ≈ 108 cm.

Riemenlänge 108 cm.

c) $e = 30$ cm; $d = 10 + 5 = 15$ cm;

rechtwinkliges Dreieck ADE:

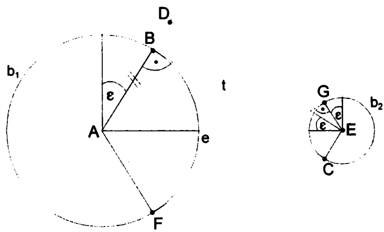
$\overline{DG} = \sqrt{e^2 - d^2} = 25{,}99$ cm;

$t = \overline{BC} = \overline{DG} = 25{,}99$ cm;

$\sin\varepsilon = \frac{d}{e} = \frac{15}{30} \Rightarrow \varepsilon = 30°$;

$$b_1 = (180° + 2\varepsilon) \cdot \frac{2\pi}{360°} \cdot 10 = 41{,}89\,\text{cm}$$

$$b_2 = (180° + 2\varepsilon) \cdot \frac{2\pi}{360°} \cdot 5 = 20{,}94\,\text{cm}$$



$l = 2 \cdot t + b_1 + b_2 = 114{,}79$ cm ≈ 115 cm. Riemenlänge: 115 cm.

d) $t_1 = \sqrt{150^2 - (15-10)^2} = 149{,}92$ cm;

$t_2 = \sqrt{150^2 - (15-5)^2} = 149{,}67$ cm

$t_3 = \sqrt{150^2 - (10-5)^2} = 149{,}92$ cm;

$\tan\varepsilon_1 = \frac{15-10}{t_1} \Rightarrow \varepsilon_1 = 1{,}910°$;

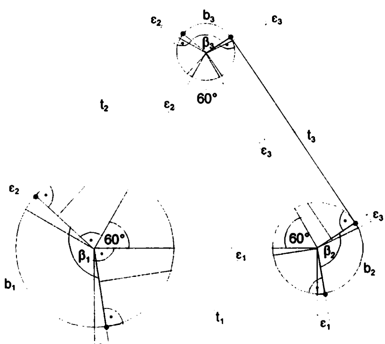
$\tan\varepsilon_2 = \frac{15-5}{t_2} \Rightarrow \varepsilon_2 = 3{,}823°$;

$\tan\varepsilon_3 = \frac{10-5}{t_3} \Rightarrow \varepsilon_3 = 1{,}910°$;

$\beta_1 = 360° - (60° + 90° - \varepsilon_1 + 90° - \varepsilon_2) =$
$= 125{,}73°$

$\beta_2 = 360° - (60° + 90° - \varepsilon_1 + 90° - \varepsilon_3) =$
$= 123{,}82°$

$\beta_3 = 360° - (60° + 90° - \varepsilon_2 + 90° - \varepsilon_3) =$
$= 125{,}73°$

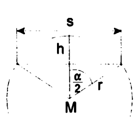


$b_1 = 2\pi \cdot 15 \cdot \beta_1/360° = 32{,}92$ cm; $b_2 = 2\pi \cdot 10 \cdot \beta_2 \cdot/360° = 21{,}61$ cm; $b_3 = 2\pi \cdot 5 \cdot \beta_3 \cdot/360° = 10{,}97$ cm;

$l = t_1 + t_2 + t_3 + b_1 + b_2 + b_3 = 515{,}00$ cm ≈ 515 cm; Riemenlänge: 515 cm

4.116 $b = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360°}$; $A_S = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360}$; $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{s}{2}}{r} \Rightarrow s = 2r \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$;

$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{r-h}{r} \Rightarrow r - h = r \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$; $A_{Segm} = \frac{b \cdot r}{2} - \frac{s \cdot (r-h)}{2}$

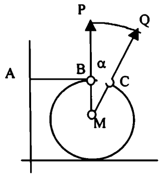


α°	Bogenlänge	Sektor	Segment
90	37,7 cm	452,4 cm²	164,4 cm²
60	25,1 cm	301,6 cm²	52,2 cm²
70	29,3 cm	351,9 cm²	81,2 cm²

4.117 Wird der Stab AB um 1 mm verlängert, so bewegt sich der Punkt B auf der Rolle nach C. $r = d/2 = 40$ mm, $R = 220$ mm.

Bogen BC = 1mm = $2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360°} \Rightarrow \alpha = 1{,}432°$;

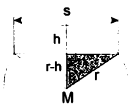
Bogen PQ = $2\pi R \cdot \frac{\alpha}{360°} = 5{,}5$ mm



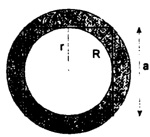
4.118 $s = 195 - 2 \cdot 18 = 159$ cm ; $h = 48 - 16 = 32$ cm

$r^2 = (r-h)^2 + \frac{s^2}{4} \Rightarrow r = \frac{s^2 + 4h^2}{8h} = 114{,}75 \text{ cm} \approx 115 \text{ cm}$

$\sin\varepsilon = \frac{s/2}{r} \Rightarrow \varepsilon = 43{,}85°$; $b = 2\pi r \cdot \frac{\varepsilon}{360°} = 175{,}65 \text{ cm} \approx 176 \text{ cm}$



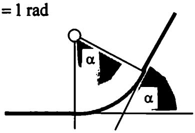
4.119 $R = \frac{a}{\sqrt{2}}$; $r = \frac{a}{2}$; $A_R = \pi \cdot (R^2 - r^2) = \pi \cdot \left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) = \frac{\pi}{4} \cdot a^2$



4.120 $R = \frac{92}{2} = 46$ mm; $r = 46 - 15 = 31$ mm; $A_R = \pi \cdot (R^2 - r^2) = 3628{,}5 \text{ mm}^2 \approx 36{,}3 \text{ cm}^2$

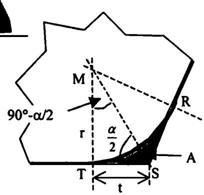
4.121 $R = 12$ cm; $\pi \cdot (R^2 - r^2) = \pi \cdot r^2 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot R = 8{,}485 \text{ cm} \approx 8{,}5 \text{ cm}$

4.122 $b = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360°} = r \Rightarrow \alpha = \frac{180°}{\pi} \approx 57{,}3° = 1 \text{ rad}$



4.123 $b = 2\pi \cdot 250 \cdot \frac{70°}{360°} = 305{,}4 \text{ m} \approx 305 \text{ m}$

4.124 $2\pi \cdot 319 \cdot \frac{\alpha}{360°} = 435 \Rightarrow \alpha \approx 78°$

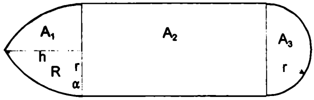


4.125 $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{t} \Rightarrow t = \frac{r}{\tan\frac{\alpha}{2}} = r \cdot \cot\frac{\alpha}{2}$; $A_{MTSR} = r \cdot t$;

$A_{Sektor} = \pi r^2 \cdot \frac{180° - \alpha}{360°}$; $A = A_{MTSR} - A_{Sektor} = r^2 \cdot \left(\cot\frac{\alpha}{2} - (180° - \alpha) \cdot \frac{\pi}{360°}\right)$

4.126 $A = 2 \cdot A_1 + A_2 + A_3$; $R = 120$ cm; $r = 60$ cm

$\cos\alpha = \frac{r}{R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60°;\; h = \frac{R}{2} \cdot \sqrt{3};$

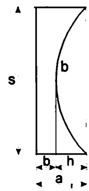


$A_1 = \pi R^2 \cdot \frac{60°}{360°} - \frac{1}{2} \cdot r \cdot h = 4422{,}13 \text{ cm}^2;$

$A_2 = 400 \cdot R = 48000 \text{ cm}^2;$

$A_3 = 0{,}5 \cdot \pi \cdot r^2 = 5654{,}87 \text{ cm}^3$; $A = 62499{,}13 \text{ cm}^2 \approx 625 \text{ dm}^2$

4.127 $a = 38$ mm ; $b = 15$ mm ; $s = 140$ mm, $h = a - b = 23$ mm;



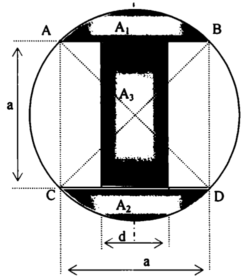
$r = \frac{s^2 + 4h^2}{8h} = 118{,}02 \text{ mm};\; \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{s/2}{r} \Rightarrow \varphi = 72{,}76°;$

Kreisbogen $b = 2\pi r \cdot \frac{\varphi}{360°} = 149{,}87$ mm;

$A_{Segm} = \frac{b \cdot r}{2} - \frac{s \cdot (r-h)}{2} = 2192{,}33 \text{ mm}^2$; $A_{Rechteck} = a \cdot s = 5320 \text{ mm}^2$;

$A = A_{Rechteck} - A_{Segm} = 3127{,}67 \text{ mm}^2 \approx 31{,}3 \text{ cm}^2$

4.128 $\overline{BC} = 62 \text{ mm} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{AC} = a = \frac{62}{\sqrt{2}} \approx 43{,}84 \text{ mm}$



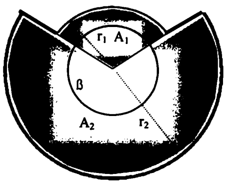
4 Segmente = Kreis – Quadrat

Zwei Segmente... $A_1 + A_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(31^2 \cdot \pi - a^2\right) = 548{,}54 \text{ mm}^2$

$A_3 = a \cdot d = 1052{,}17 \text{ mm}^2$

$A = A_1 + A_2 + A_3 = 1600{,}7 \text{ mm}^2 \approx 16{,}0 \text{ cm}^2$

4.129

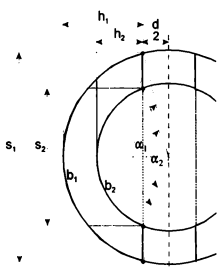


$r_1 = 27$; $r_2 = 45$; $\alpha = 140°$; $ß = 220°$

$u = 2\pi r_1 \cdot \frac{\alpha}{360°} + 2\pi r_2 \cdot \frac{\beta}{360°} + 2 \cdot (r_2 - r_1) \approx 275 \text{ mm}$

$A = \pi r_1^2 \cdot \frac{\alpha}{360°} + \pi r_2^2 \cdot \frac{\beta}{360°} = 4778{,}3 \text{ mm}^2 \approx 47{,}8 \text{ cm}^2$

4.130 Außenradius $r_1 = 21{,}0$ mm; Innenradius $r_2 = 17{,}0$ mm;



$\cos\frac{\alpha_2}{2} = \frac{d/2}{r_2} \Rightarrow \alpha_2 = 152{,}78°;\; b_2 = 2\pi r_2 \cdot \frac{\alpha_2}{360°} = 45{,}33 \text{ mm};$

$r_2^2 = \left(\frac{s_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow s_2 = 33{,}05 \text{ mm};\; h_2 = r_2 - \frac{d}{2} = 13{,}0 \text{ mm};$

Segmentfläche $A_2 = \frac{1}{2} \cdot b_2 \cdot r_2 - \frac{1}{2} \cdot s_2 \cdot (r_2 - h_2) = 319{,}23 \text{ mm}^2$;

$\cos\frac{\alpha_1}{2} = \frac{d/2}{r_1} \Rightarrow \alpha_1 = 158{,}04°;\; b_1 = 2\pi r_1 \cdot \frac{\alpha_1}{360°} = 57{,}92 \text{ mm};$

$r_2^2 = \left(\frac{s_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow s_1 = 41{,}23 \text{ mm};\; h_1 = r_1 - \frac{d}{2} = 13{,}0 \text{ mm};$

Segmentfläche $A_1 = \frac{1}{2} \cdot b_1 \cdot r_1 - \frac{1}{2} \cdot s_1 \cdot (r_1 - h_1) = 525{,}74 \text{ mm}^2$;

Verbleibende Querschnittsfläche $A = 2 \cdot (A_1 - A_2) \approx 413 \text{ mm}^2$

4.131 a) $1{,}0^\circ \frac{\pi}{180^\circ} = 0{,}0175$ b) $15{,}9^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = 0{,}278$ c) $\frac{\pi}{3} = 1{,}047$ d) $\frac{5\pi}{3} = 5{,}236$

e) $6\pi = 18{,}850$ f) $-\frac{5\pi}{9} = -1{,}745$

4.132 a) $\frac{\pi}{10} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 18^\circ$ b) $-\frac{\pi}{8} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = -22{,}5^\circ$ c) 270° d) $171{,}9^\circ$ e) $-229{,}2^\circ$

4.133 a) π b) 2π c) 3π

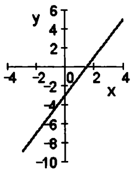
4.134 $b = r \cdot \alpha$; $A_S = \frac{r^2}{2} \cdot \alpha$

4.135 $\varphi = \frac{4 \cdot 2\pi}{5} = 5{,}027$

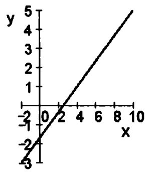
4.136 a) 0,362 b) 1,030 c) 0,199 d) 1,830 e) 0,588 f) 0,383 g) 0,560 h) 0,702

5 Funktionen

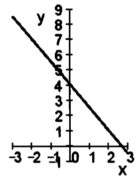
5.1 a) $y = f(x) = 2x-3$;
$W = [-9; 5]$;
$f(-3) = -9$; $f(4) = 5$



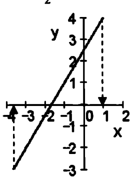
b) $y = f(x) = \frac{1}{3} \cdot (2x - 5)$;
$W = [-3; 5]$; $f(-2) = -3$; $f(10) = 5$



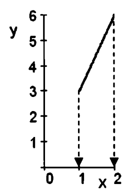
c) $y = f(x) = \frac{1}{2} \cdot (-3x + 8)$
$W = [-0{,}5; 8{,}5]$;
$f(-3) = 8.5$; $f(3) = -0.5$



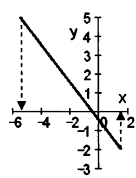
5.2 a) $y = f(x) = \frac{1}{2} \cdot (3x + 5)$; $D = [-11/3; 1]$;
$y = -3 = \frac{1}{2} \cdot (3x + 5) \Rightarrow x = -\frac{11}{3}$;
$y = 4 = \frac{1}{2} \cdot (3x + 5) \Rightarrow x = 1$



b) $y = f(x) = 3x$;
$D = [1; 2]$
$y = 3 = 3x \Rightarrow x = 1$
$y = 6 = 3x \Rightarrow x = 2$



c) $y = f(x) = -x - 0{,}5$;
$D = [-5{,}5; 1{,}5]$
$y = -2 \Rightarrow x = 1{,}5$
$y = 5 \Rightarrow x = 5.5$

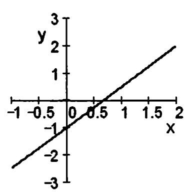


5.3 a) $2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = -2$, die Punktkoordinaten erfüllen die Geradengleichung $\Rightarrow$ P auf g

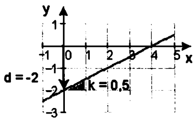
b) $2y - 3x = -2 \Rightarrow y = \frac{3}{2} \cdot x - 1$; $k = \frac{3}{2}$, $d = -1$;

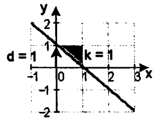
$k > 0 \Rightarrow$ Gerade steigt, Funktion streng monoton wachsend

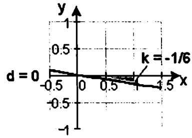
c) $y = 0$: $0 = \frac{3}{2} \cdot x - 1 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$ als Nullstelle



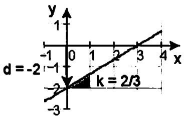
5.4 a) $y=\frac{1}{2}\cdot x-2$ b) $y = -x + 1$ c) $y=-\frac{1}{6}\cdot x$

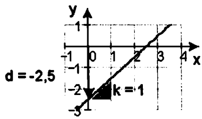






d) $y=\frac{2}{3}\cdot x-2$ e) $y=x-\frac{5}{2}$





5.5 a) $k=\tan 30° =\frac{\sqrt{3}}{3}\approx 0{,}58;\ 2=k\cdot 0+d \Rightarrow d;\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot x+2$

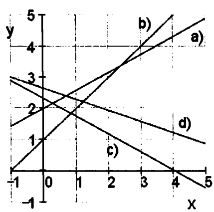
b) $k=\tan 45° =1;\ 3=k\cdot 2+d \Rightarrow d=1;\ y=x+1$

c) $k=\tan 150° =-\frac{\sqrt{3}}{3}\approx -0{,}58;\ 0=4\cdot k+d \Rightarrow$

$d=\frac{4\cdot\sqrt{3}}{3};\ y=-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot x+\frac{4\cdot\sqrt{3}}{3}\approx -0{,}58\cdot x+2{,}31$

d) $k=\tan(-20°)=-0{,}36;\ 3=k\cdot(-1)+d \Rightarrow$

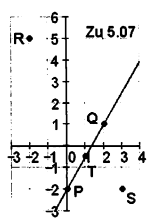
$d=2{,}64;\ y=-0{,}36\cdot x+2{,}64$



Gleiche Einheiten auf beiden Koordinatenachsen, damit Winkel unverzerrt!

5.6 a) $x = -1{,}5$ b) $x = 0{,}5$ c) $x = 0$ d) $x = 2$ e) $x = 5$

5.7 a) $3\cdot 0 - 2\cdot(-2) = 4$, ja b) $3\cdot 2 - 2\cdot 1 = 4$, ja c) $3\cdot(-2) - 2\cdot 5 \neq 4$, nein
d) $3\cdot 3 - 2\cdot(-2) \neq 4$, nein e) $3\cdot 1 - 2\cdot(-0{,}5) = 4$, ja



5.8 a) $4=3k+5 \Rightarrow k=-\frac{1}{3};\ y=-\frac{1}{3}\cdot x+5$

b) $-8=-14+d \Rightarrow d=6;\ y=-2\cdot x+6$

c) $k=\tan 45° =1;\ -1=1+d \Rightarrow d=-2;\ y=x-2$

5.9 a) $k=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_S-y_R}{x_S-x_R}=\frac{-10-(-3)}{5-2}=-\frac{7}{3};\ -3=k\cdot 2+d=-\frac{7}{3}\cdot 2+d \Rightarrow d=\frac{5}{3};\ y=-\frac{7}{3}x+\frac{5}{3};$

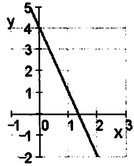
Nullstelle: $y=-\frac{7}{3}x+\frac{5}{3}=0 \Rightarrow x=\frac{5}{7}$

b) $k=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-3-2}{3-(-1)}=-\frac{5}{4};\ 2=-\frac{5}{4}\cdot(-1)+d \Rightarrow d=\frac{3}{4};\ y=-\frac{5}{4}\cdot x+\frac{3}{4};\ y=0 \Rightarrow$ Nullstelle $x=\frac{3}{5}$

c) $k=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2-1}{4-0}=\frac{1}{4};\ 1=\frac{1}{4}\cdot 0+d \Rightarrow d=1;\ y=\frac{1}{4}\cdot x+1;\ y=0 \Rightarrow$ Nullstelle $x=-4$

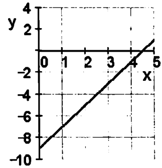
d) $k=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{4-(-4)}{4-(-4)}=1;\ -4=1\cdot(-4)+d \Rightarrow d=0;\ y=x;\ y=0 \Rightarrow$ Nullstelle $x=0$

5.10 a) $y = -3x + 4 = 0$



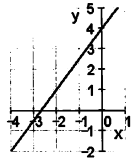
Nullstelle: $x = \frac{4}{3}$

b) $y = 2x+3-12 =$
$= 2x-9 = 0$



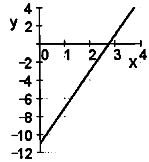
Nullstelle: $x = \frac{9}{2}$

c) $y = 2x + 1 - (0{,}5x - 3)$
$= 1{,}5x + 4 = 0$



Nullstelle: $x = -\frac{8}{3}$

d) $y = 4x - 3 - 8 =$
$= 4x - 11 = 0$



Nullst.: $x = \frac{11}{4} = 2{,}75$

5.11 a) $y = -\frac{3}{2}\cdot x + 2$; etwa: $x_1 = 2; y_1 = -1$; $x_2 = 6; y_2 = -7$; $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{3}{2}$; $x_1 = 0; y_1 = 2$;

$x_2 = 4; y_2 = -4$; $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{3}{2}$; die Differenzenquotienten sind gleich groß, ihr Wert ist gleich der Steigung k der Geraden, die Gerade fällt

b) $y = \frac{2}{3}\cdot x - 2$; etwa: $x_1 = 0; y_1 = -2$; $x_2 = 2; y_2 = -\frac{2}{3}$; $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2}{3}$; $x_1 = -3; y_1 = -4$;

$x_2 = 3; y_2 = 0$; $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2}{3}$; die Differenzenquotienten sind gleich groß, ihr Wert ist gleich der Steigung k der Geraden, die Gerade steigt

c) $y = \frac{3}{4}\cdot x - 3$; etwa: $x_1 = 2; y_1 = -\frac{3}{2}$; $x_2 = 3; y_2 = -\frac{3}{4}$; $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3}{4}$; $x_1 = -4; y_1 = -6$;

$x_2 = 0; y_2 = -3$; $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3}{4}$; die Differenzenquotienten sind gleich groß, ihr Wert ist gleich der Steigung k der Geraden, die Gerade steigt

d) $y = \frac{1}{2}\cdot x + \frac{3}{2}$; etwa: $x_1 = -3; y_1 = 0$; $x_2 = 3; y_2 = 3$; $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1}{2}$; $x_1 = -1; y_1 = 1$;

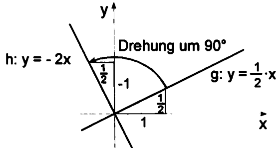
$x_2 = 1; y_2 = 2$; $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1}{2}$; die Differenzenquotienten sind gleich groß, ihr Wert ist gleich der Steigung k der Geraden, die Gerade steigt

5.12 x-Achse: $y = 0$; y-Achse: $x = 0$, keine Funktion, da zum x-Wert 0 mehr als nur ein y-Wert gehört (hier sogar unendliche viele y-Werte)

5.13

$\alpha = 0°$	$k = \tan 0° = 0$; konstant
$0° < \alpha < 90°$	$k = \tan\alpha > 0$, streng monoton steigend
$\alpha = 90°$	keine Funktion
$90° < \alpha < 180°$	$k = \tan\alpha < 0$, streng monoton fallend

5.14



Bei Drehung der Geraden g um 90° liest man aus dem Steigungsdreieck der neuen Geraden h als Steigung k_h ab: $k_h = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$. k_h ist daher $-\frac{1}{k}$, wenn k die Steigung von g ist.

5.15 a) Die zu g parallele Gerade $y = k\cdot x + d$ hat die gleiche Steigung wie g: $y = 2x + d$;
$-4 = 2\cdot 3 + d \Rightarrow d = -10$; $y = 2x - 10$

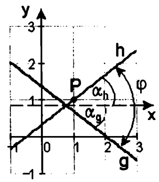
b) Die zu g normale Gerade $y = k\cdot x + d$ hat die Steigung $-1/k_g = -1/2 = -0{,}5$ (siehe Aufgabe 5.14):
$y = -0{,}5\cdot x + d$; $-4 = -0{,}5\cdot 3 + d \Rightarrow d = -2{,}5$; $y = -0{,}5\cdot x - 2{,}5$

5.16 g: $y=-\frac{2}{3}\cdot x+\frac{4}{3}$; $k_g=-\frac{2}{3}=\tan\alpha_g \Rightarrow \alpha_g=-33{,}69°$;

h: $y=\frac{2}{3}\cdot x+d$, A(1/1) auf h: $1=\frac{2}{3}\cdot 1+d \Rightarrow d=\frac{1}{3}$; $y=\frac{2}{3}\cdot x+\frac{1}{3}$;

$k_h=\frac{2}{3}=\tan\alpha_h \Rightarrow \alpha_h=33{,}69°$;

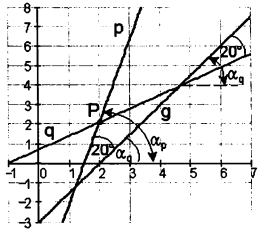
Schnittwinkel $\varphi=|\alpha_g|+\alpha_h=33{,}69°+33{,}69°\approx 67{,}4°$



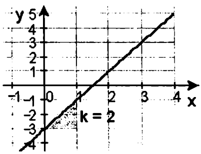
5.17 g: $y=1{,}5\cdot x-3$; $k_g=1{,}5=\tan\alpha_g \Rightarrow \alpha_g=56{,}31°$.
p und q bezeichnen die beiden Geraden, die mit g einen Winkel von 20° einschließen.

p: $\alpha_p=\alpha_g+20°=76{,}31°$; $k_p=\tan\alpha_p=4{,}105$;
$y=4{,}105\cdot x+d$;
P auf p: $2=4{,}105\cdot 2+d \Rightarrow d=-6{,}211$;
$y=4{,}105\cdot x-6{,}211$

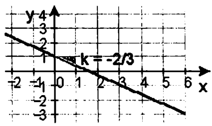
q: $\alpha_q=\alpha_g-20°=36{,}31°$; $k_q=\tan\alpha_q=0{,}735$;
$y=0{,}735\cdot x+d$;
P auf q: $2=0{,}735\cdot 2+d \Rightarrow d=0{,}530$;
$y=0{,}735\cdot x+0{,}530$



5.18 a) $y=2x-3$; $k=2$, $d=-3$; Funktion: Zu jedem x–Wert gehört genau ein y–Wert.



b) $y=-\frac{2}{3}\cdot x+1$; $k=-\frac{2}{3}$, $d=1$; Funktion: Zu jedem x–Wert gehört genau ein y–Wert.



c) $y=\frac{3}{2}\cdot x+2$; $k=\frac{3}{2}$; $d=2$; Funktion

d) $x=-1$; keine Funktion: Zum x–Wert -1 gehört mehr als ein y–Wert (sogar unendlich viele y–Werte)

e) $y=\frac{1}{2}\cdot x-2$; $k=\frac{1}{2}$; $d=-2$; Funktion

f) $y=-\frac{6}{5}\cdot x-4$; $k=-\frac{6}{5}$; $d=-4$; Funktion

g) $y=-x$; $k=-1$; $d=0$; Funktion

h) $y=-2x+2$; $k=-2$; $d=2$; Funktion

5.19 a) $\frac{0-3}{4-(-2)}=\frac{0-y_2}{4-0} \Rightarrow y_2=2$ b) $\frac{11-(-3)}{4-(-3)}=\frac{11-5}{4-x_2} \Rightarrow x_2=1$ c) $\frac{2-2}{0-(-3)}=\frac{2-y_3}{4-(-3)} \Rightarrow y_3=2$

5.20 a) Beim Fortschreiten von x = 0 auf x = 3, also um $\Delta x=3$, nimmt y um 14–8 = 6 zu: $\Delta y=6$; *pro x–Einheit* müsste der y–Zuwachs also $\Delta y/\Delta x=6/3=2$ betragen. Dies ist beim Fortschreiten von x = 3 auf x = 4 der Fall. Eine lineare Funktion ist daher möglich.

b) Beim Fortschreiten von x = –3 auf x = –2, also um $\Delta x=1$, nimmt y um 13 – 3 = 10 ab: $\Delta y=-10$. Beim Fortschreiten von x = –2 auf x = 0, also $\Delta x=2$, müsste sich y daher um $2\cdot\Delta y/\Delta x=-20$ auf 3 – 20 = –17 ändern. Tatsächlich ist bei x = 0 der y–Wert gleich –5. Eine lineare Funktion ist daher nicht möglich.

c) Beim Fortschreiten von x = –3 auf x = 0, also um $\Delta x=3$, nimmt y um 5 – (–1) = 6 zu: $\Delta y=6$; *pro x–Einheit* müsste der y–Zuwachs also $\Delta y/\Delta x=6/3=2$ betragen. Von x = 0 auf x = 3 müsste sich y um $3\cdot\Delta y/\Delta x=3\cdot 2=6$, von x = 3 auf x = 7 um $4\cdot\Delta y/\Delta x=4\cdot 2=8$, ändern. Dies ist der Fall: y ändert sich von 5 auf 11 bzw. von 11 auf 19. Eine lineare Funktion ist daher möglich.

5.21 a) (1)

x	y		
20,0	510	H =	20,0
30,0	y	h =	10,0
40,0	290	D =	–220
		d =	–110

R = 400 Ω

a) (2)

x	y		
40,0	290	H =	20,0
50,0	y	h =	10,0
60,0	178	D =	–112
		d =	–56

R = 234 Ω

a) (3)

x	y		
60,0	178	H =	20,0
70,0	y	h =	10,0
80,0	120	D =	–58
		d =	–29

R = 149 Ω

a) (4)

x	y		
60,0	178	H =	20,0
75,0	y	h =	15,0
80,0	120	D =	–58
		d =	–43,5

R = 134,5 Ω ≈ 135 Ω

a) (5)

x	y		
80,0	120	H =	20,0
95,0	y	h =	15,0
100,0	80	D =	–40
		d =	–30

R = 90 Ω

b) (1)

x	y	
20,0	510	H = –220
x	400	h = –110
40,0	290	D = 20,0
		d = 10,0

ϑ = 30,0° C

b) (2)

x	y	
40,0	290	H =–112
x	200	h = –90
60,0	178	D = 20
		d = 16,1

ϑ = 56,1° C

b) (3)

x	y		
60,0	178	H =	–58
x	150	h =	–28
80,0	120	D =	20,0
		d =	9,7

ϑ = 69,7° C

b) (4)

x	y	
80,0	120	H = –40
x	100	h = –20
100,0	80	D = 20,0
		d = 10,0

ϑ = 90,0°

5.22 a) (1)

x	y		
0,0	0,00	H =	1,0
0,5	y	h =	0,5
1,0	39,35	D =	39,35
		d =	19,68

U_R = 19,68 V

a) (2)

x	y		
0,0	0,00	H =	1,0
0,75	y	h =	0,75
1,0	39,35	D =	39,35
		d =	29,51

U_R = 29,51 V

a) (3)

x	y		
2,0	63,21	H =	1,0
2,5	y	h =	0,5
3,0	77,69	D =	14,48
		d =	7,24

U_R = 70,45 V

a) (4)

x	y		
4,0	86,47	H =	1,0
4,25	y	h =	0,25
5,0	91,79	D =	5,32
		d =	1,33

U_R = 87,80 V

a) (5)

x	y		
7,0	96,96	H =	1,0
7,5	y	h =	0,5
8,0	98,17	D =	1,21
		d =	0,61

U_R = 97,57 V

b) (1)

x	y		
0,0	0,00	H =	39,35
x	25,00	h =	25,00
1,0	39,35	D =	1
		d = 0,64 ≈ 0,6	

t = 0,6 s

b) (2)

x	y		
			0,92
1,0	39,35	H =	23,86
x	61,25	h =	21,90
2,0	63,21	D =	1,0
		d = 0,92 ≈ 0,9	

t = 1,9 s

b) (3)

x	y		
4,0	86,47	H =	5,32
x	90,26	h =	3,79
5,0	91,79	D =	1,0
		d = 0,71 ≈ 0,7	

t = 4,7 s

b) (4)

x	y		
7,0	96,96	H =	1,21
x	97,25	h =	0,29
8,0	98,17	D =	1,0
		d = 0,24 ≈ 0,2	

t = 7,2 s

5.23 a) (1)

x	y		
0,0	1,224	H =	2,0
1,0	y	h =	1,0
2,0	1,216	D =	–0,008
		d =	–0,004

$\rho = 1{,}220\ \mathrm{kgm}^{-3}$

a) (2)

x	y		
0,0	1,224	H =	2,0
1,5	y	h =	1,5
2,0	1,216	D =	–0,008
		d =	–0,006

$\rho = 1{,}218\ \mathrm{kgm}^{-3}$

a) (3)

x	y		
6,0	1,198	H =	2,0
6,8	y	h =	0,8
8,0	1,190	D =	–0,008
		d =	–0,003

$\rho = 1{,}195\ \mathrm{kgm}^{-3}$

5.23 a) (4)

x	y		
10,0	1,181	H =	2,0
10,5	y	h =	0,5
12,0	1,173	D =	–0,008
		d =	–0,002

$\rho = 1{,}179\ \mathrm{kgm^{-3}}$

a) (5)

x	y		
16,0	1,157	H =	2,0
16,5	y	h =	0,5
18,0	1,149	D =	–0,008
		d =	–0,002

$\rho = 1{,}155\ \mathrm{kgm^{-3}}$

b) (1)

x	y		
0,0	1,224	H =	–0,008
x	1,220	h =	–0,004
2,0	1,216	D =	2,0
		d =	1,0

$\vartheta = 1{,}0°$ C

b) (2)

x	y		
2,0	1,216	H =	–0,009
x	1,209	h =	–0,007
4,0	1,207	D =	2,0
		d =	1,6

$\vartheta = 3{,}6°$ C

b) (3), (4)

x	y		
16,0	1,157	H =	–0,008
x	1,152	h =	–0,005
18,0	1,149	D =	2,0
		d =	1,25 ≈ 1,3

$\vartheta = 17{,}3°$ C

5.24 a) (1)

x	y	
68,65	89,45	H = 9,80
75,80	y	h = 7,15
78,45	92,99	D = 3,54
		d = 2,58

$\vartheta = 92{,}03°$ C

a) (2)

x	y	
88,26	96,18	H = 9,81
93,35	y	h = 5,09
98,07	99,09	D = 2,91
		d = 1,51

$\vartheta = 97{,}69°$ C

a) (3)

x	y	
101,30	100,00	H = 45,80
112,30	y	h = 11,00
147,10	110,79	D = 10,79
		d = 2,59

$\vartheta = 102{,}59°$ C

a) (4)

x	y	
245,20	126,79	H = 49,00
265,45	y	h = 20,25
294,20	132,88	D = 6,09
		d = 2,52

$\vartheta = 129{,}31°$ C

b) (1)

x	y	
68,65	89,45	H = 3,54
x	90,75	h = 1,30
78,45	92,99	D = 9,80
		d = 3,60

p = 72,25 kPa

b) (2)

x	y	
98,07	99,09	H = 0,91
x	99,25	h = 0,16
101,30	100,00	D = 3,23
		d = 0,57

p = 98,64 kPa

b) (3)

x	y	
101,30	100,00	H = 10,79
x	105,55	h = 5,55
147,10	110,79	D = 45,80
		d = 23,56

p = 124,86 kPa

b) (4)

x	y	
196,10	119,62	H = 7,17
x	120,00	h = 0,38
245,20	126,79	D = 49,10
		d = 2,60

p = 198,70 kPa

5.25 a)

x	y		
1,0	0,2	H =	0,2
x	0,3	h =	0,1
2,0	0,4	D =	1,0
		d =	0,5

Farbstärke = 1,5°

b)

x	y		
2,0	0,4	H =	0,6
x	0,5	h =	0,1
5,0	1,0	D =	3,0
		d =	0,5

Farbstärke = 2,5°

c)

x	y		
2,0	0,4	H =	0,6
x	0,6	h =	0,2
5,0	1,0	D =	3,0
		d =	1,0

Farbstärke = 3,0°

d)

x	y		
5,0	1,0	H =	1,00
x	1,25	h =	0,25
10,0	2,0	D =	5,0
		d =	1,25

Farbstärke = 6,25°

e)

x	y		
5,0	1,0	H =	1,00
x	1,75	h =	0,75
10,0	2,0	D =	5,00
		d =	3,75

Farbstärke = 8,75°

5.26 a)

x	y		
0,1	30	H =	30
x	45	h =	15
0,2	60	D =	0,10
		d =	0,05

Methylalkohol: 0,15 mg/l

b)

x	y		
0,1	30	H =	30
x	55	h =	25
0,2	60	D =	0,10
		d =	0,08

Methylalkohol: 0,18 mg/l

c)

x	y		
0,2	60	H =	60
x	90	h =	30
0,4	120	D =	0,20
		d =	0,10

Methylalkohol: 0,30 mg/l

5.27 a) (1)

x	y	
0,4752	0,4575	H = 0,5280
0,5000	y	h = 0,0248
1,0032	0,8432	D = 0,3857
		d = 0,0181
		y = 0,4756

a) (2)

x	y	
0,4752	0,4575	H = 0,5280
1,0000	y	h = 0,5248
1,0032	0,8432	D = 0,3857
		d = 0,3834
		y = 0,8409

a) (3)

x	y	
1,0032	0,8432	H = 0,4752
1,4500	y	h = 0,4468
1,4784	0,9957	D = 0,1525
		d = 0,1434
		y = 0,9866

a) (4)

x	y	
1,4784	0,9957	H = 0,8448
2,0500	y	h = 0,5716
2,3232	0,7301	D = –0,2656
		d = –0,1797
		y = 0,8160

b) (1)

x	y	
0,4752	0,4575	H = 0,3857
x	0,5523	h = 0,0948
1,0032	0,8432	D = 0,5280
		d = 0,1298
		x = 0,6050

b) (2) 1. Möglichkeit

x	y	
1,0032	0,8432	H = 0,1525
x	0,9300	h = 0,0868
1,4784	0,9957	D = 0,4752
		d = 0,2705
		x = 1,2737

b) (2) 2. Möglichkeit

x	y	
1,4784	0,9957	H = –0,2656
x	0,9300	h = –0,0657
2,3232	0,7301	D = 0,8448
		d = 0,2090
		x = 1,6874

b) (3)

x	y	
0,4752	0,4575	H = 0,3857
x	0,6900	h = 0,2325
1,0032	0,8432	D = 0,5280
		d = 0,3183
		x = 0,7935

5.28 a) (1)

x	y	
–1,8319	2,4992	H = 1,2437
–1,5000	y	h = 0,3319
–0,5882	1,3419	D = –1,1573
		d = –0,3088
		y = 2,1904

a) (2)

x	y	
–1,8319	2,4992	H = 1,2437
–0,8567	y	h = 0,9752
–0,5882	1,3419	D = –1,1573
		d = –0,9075
		y = 1,5917

a) (3)

x	y	
–0,5882	1,3419	H = 0,6722
0,0000	y	h = 0,5882
0,0840	0,9589	D = –0,3830
		d = –0,3351
		y = 1,0068

a) (4)

x	y	
0,0840	0,9589	H = 1,1093
1,0534	y	h = 0,9694
1,1933	0,5507	D = –0,4082
		d = –0,3567
		y = 0,6022

b) (1)

x	y	
–1,8319	2,4992	H = –1,1573
x	1,5523	h = –0,9469
–0,5882	1,3419	D = 1,2437
		d = 1,0176
		x = –0,8143

b) (2)

x	y	
0,0840	0,9589	H = –0,4082
x	0,9325	h = –0,0264
1,1933	0,5507	D = 1,1093
		d = 0,0717
		x = 0,1557

b) (3)

x	y	
0,0840	0,9589	H = –0,4082
x	0,8457	h = –0,1132
1,1933	0,5507	D = 1,1093
		d = 0,3076
		x = 0,3916

5.29 a) (1)

x	y		
-2,90	2,19	H =	0,100
-2,85	y	h =	0,050
-2,80	2,36	D =	0,170
		d =	0,085
		y =	**2,275**

a) (2)

x	y		
-2,70	2,51	H =	0,100
-2,65	y	h =	0,050
-2,60	2,64	D =	0,130
		d =	0,065
		y =	**2,575**

a) (3)

x	y		
–2,50	2,75	H =	0,100
–2,45	y	h =	0,050
–2,40	2,84	D =	0,090
		d =	0,045
		y =	**2,795**

5.29 b) (1)

x	y
–3,00	2,000
x	2,055
–2,90	2,190

H =	0,190
h =	0,055
D =	0,10
d =	0,03
x =	-2,97

b) (2)

x	y
–2,90	2,190
x	2,350
–2,80	2,360

H =	0,170
h =	0,160
D =	0,10
d =	0,09
x =	–2,81

b) (3)

x	y
-2,40	2,840
x	2,880
-2,30	2,910

H =	0,070
h =	0,040
D =	0,10
d =	0,06
x =	–2,34

5.30 a) (1)

x	y
0,500	0,5463
0,750	y
1,000	1,5574

H =	0,500
h =	0,250
D =	1,0111
d =	0,5056
y =	1,0519

a) (2)

x	y
1,500	14,1010
1,650	y
2,000	–2,1850

H =	0,500
h =	0,150
D =	–16,2860
d =	–4,8858
y =	9,2152

a) (3)

x	y
2,000	–2,1850
2,450	y
2,500	–0,7470

H =	0,500
h =	0,450
D =	1,4380
d =	1,2942
y =	–0,8908

b) (1)

x	y
1,000	1,5574
x	2,0550
1,500	14,1010

H =	12,5436
h =	0,4976
D =	0,500
d =	0,020
x =	1,020

b) (2)

x	y
2,000	–2,1850
x	–1,3500
2,500	–0,7470

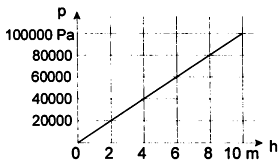
H =	1,4380
h =	0,8350
D =	0,500
d =	0,290
x =	2,290

b) (3)

x	y
2,000	–2,1850
x	–0,8800
2,500	–0,7470

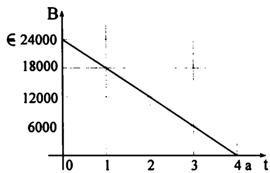
H =	1,4380
h =	1,3050
D =	0,500
d =	0,454
x =	2,454

5.31 a)



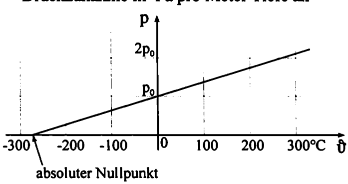
b) Der Differenzenquotient gibt die Druckzunahme in Pa pro Meter Tiefe an

5.32 a)



b) € 6000,-

5.33

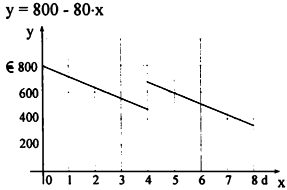


Der Gasdruck p wird als Vielfaches des Gasdruckes bei $\vartheta = 0°C$ dargestellt.

5.34 $V = 60 - \frac{8}{100} \cdot s$; $s = 750$ km

5.35 a) $y = 800 - 80 \cdot x$

b)

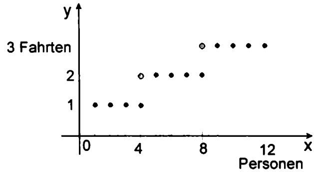


Dabei wird einfachheitshalber angenommen, dass der Verbrauch während eines Tages gleichmäßig und kontinuierlich ist.

5.36 $\vartheta_F = \frac{9}{5} \cdot \vartheta_C + 32$;

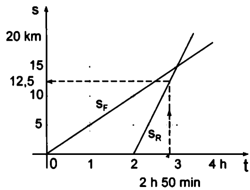
$\vartheta_C = \frac{5}{9} \cdot \vartheta_F - \frac{160}{9}$

5.37



Die Definitionsmenge der Funktion enthält nur die natürlichen zahlen 1, 2, 3, ..

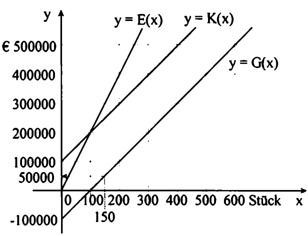
5.38 a)



b) Die Koordinate des Schnittpunktes der Graphen gibt den Einholzeitpunkt, die y-Koordinate die Entfernung von A beim Einholen an. Aus der Graphik liest man ab, dass der Radfahrer nach 1 Stunde Fahrzeit den Fußgänger in einer Entfernung von 15 km von A einholt.

c) Der Radfahrer ist 12,5 km von A entfernt, wenn er in 10 Minuten den Fußgänger erreicht.

5.39 **a)** E(x) = 2000x; G(x) = 1000x – 100000



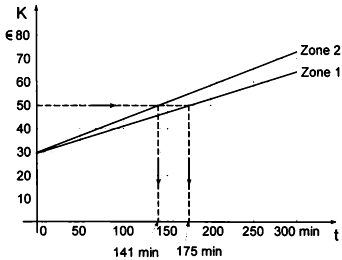
b) Die Gewinnschwelle ist die Nullstelle der Gewinnfunktion G(x) oder gleichbedeutend die x-Koordinate des Schnittpunktes der Erlösfunktion E(x) mit der Kostenfunktion K(x): x = 100 Stück. Aus der Graphik sieht man ferner, dass bei x = 150 der Gewinn € 50000 beträgt.

c) G(x) = 1000x – 100000 = 0 ergibt x = 100 Stück.
Oder Lösung von E(x) = K(x), d.h. 2000x = 1000x + 100000.
G(x) = 1000x – 100000 = 50000 ergibt x = 150 Stück.

5.40 a) K(t) = 29,04 + 0,120·t

b) K(t) = 29,04 + 0,149·t

c)



d) Zone 1: t ≈ 175 min;
Zone 2: t ≈ 141 min

5.41 a) 1. Geradenstück: $k = 15, d = 0$;
2. Geradenstück: $k = -15, d = 60$

$$s = \begin{cases} 15t & \text{für } 0 \le t \le 2 \\ -15t + 60 & \text{für } 2 < t \le 4 \end{cases}$$

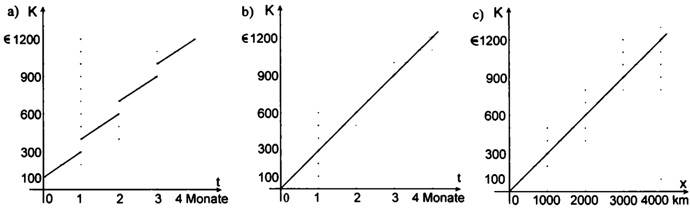
t in h, s in km

b) Aus Abb.5.38, Lehrbuch Seite 204, erkennt man, dass der Radfahrer in 2 Stunden 30 km zurücklegt, also mit einer mittleren Geschwindigkeit von 15 km/h fährt. Nach einer einstündigen Rast fährt er in 4 Stunden zum Ausgangspunkt zurück. Dabei beträgt die mittlere Geschwindigkeit 7,5 km/h.

$$s = \begin{cases} 15t & \text{für } 0 \le t \le 2 \\ 30 & \text{für } 2 < t \le 3 \\ -7{,}5t + 52{,}5 & \text{für } 3 < t \le 7 \end{cases}$$

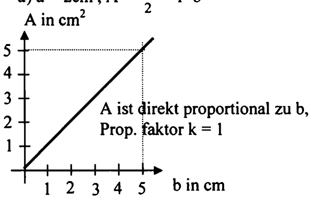
t in h, s in km

5.42

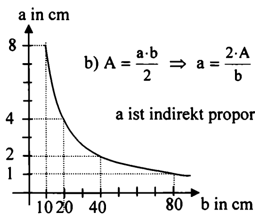


d) $K(t) = 300 \cdot t$ (t in Monaten) bzw. $K(x) = 3x$ (x in Kilometern)

5.43 a) $a = 2\text{cm}$; $A = \frac{2 \cdot b}{2} = 1 \cdot b$



b)

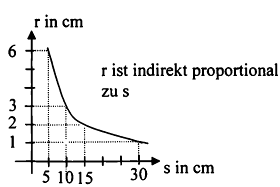


b) $A = \frac{a \cdot b}{2} \Rightarrow a = \frac{2 \cdot A}{b} = \frac{80}{b}$

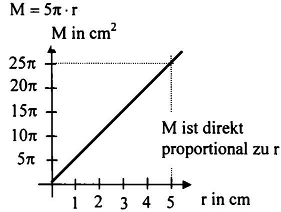
a ist indirekt proportional zu b

5.44 $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot H$, V ist direkt prop. zu H (Prop.faktor $k = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2$), nicht jedoch zu r, da r im Quadrat vorkommt

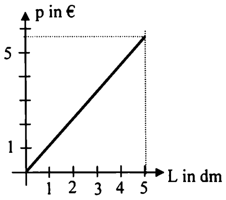
5.45 a) $M = r \cdot \pi \cdot s = 30\pi \cdot s \Rightarrow r = \frac{30}{s}$



b) $M = 5\pi \cdot r$



5.46 Preis p = € 15 pro kg; $V = 0{,}2 \cdot 0{,}05 \cdot L$ (in dm^3);
Masse $m = \rho \cdot V = 7{,}6 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}05 \cdot L$ (in kg)
Preis $p = 15 \cdot 7{,}6 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}05 \cdot L$ € $= 1{,}14 \cdot L$ € (L in dm)

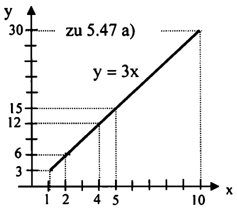


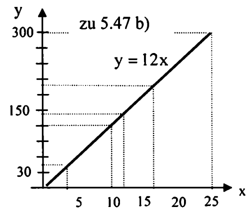
5.47 a)

x	1	2	4	5	10
y	3	6	12	15	30

b)

x	3	10	12	16	25
y	36	120	144	192	300





5.48 a)

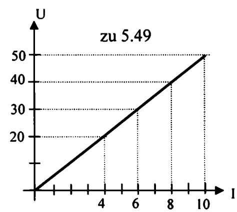
x	2	3	6	15	12
y	18	6	6	2,4	3

$y = \dfrac{36}{x}$

b)

x	21,6	0,4	0,6	129,6	172,8
y	4	216	144	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$

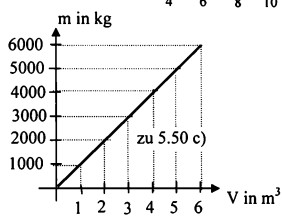
$y = \dfrac{86{,}4}{x}$



5.49

U in Volt	20	40	30	50
I in Ampere	4	8	6	10

$U = R \cdot I$, $R = 5\ \Omega$ ....direkte Proportion

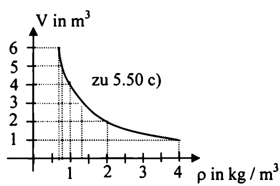


5.50 a) direkte Proportionalität
b) indirekte Proportionalität
c) (1) $\rho = 1\ kg / dm^3 = 1000\ kg / m^3$

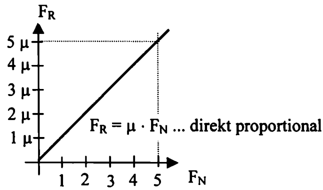
V in m^3	1	2	3	4	5	6
m in kg	1000	2000	3000	4000	5000	6000

(2) m = 4 kg

V in m^3	1	2	3	4	5	6
ρ in kg/m^3	4	2	1,3	1	0,8	0,7

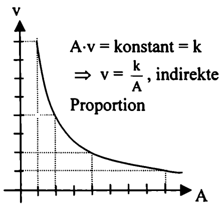


5.51

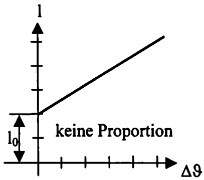


5.52 a) direkte Proportion b) indirekte Proportion c) keine Proportion

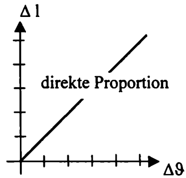
5.53



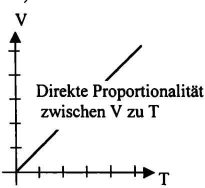
5.54 a)



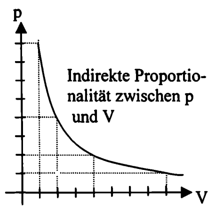
b)



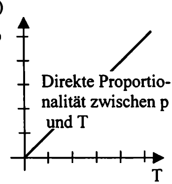
5.55 a)



b)



c)



5.56 Steht x im Nenner eines Bruches, so wird dieser (bei positivem Nenner) kleiner, wenn x wächst.
ist zu a) y wird größer , direkte Prop. b) y wird größer, keine Prop.
c) y wird kleiner, keine Prop. d) y wird kleiner; indirekte Prop.
e) y wird kleiner; indirekte Prop. f) y wird kleiner; keine Prop.
g) y wird größer; keine Prop. h) y wird kleiner; keine Prop.
i) y wird größer; keine Prop. j) y wird größer, keine Prop.
k) y wird kleiner; indirekte Prop. l) y wird kleiner; keine Prop.

5.57 a) Wie verhält sich v, wenn r wächst? Hier ist zu unterscheiden, ob der Nenner $h+1$ negativ oder positiv ist ($h+1 = 0$ ist wegen Division durch null auszuschließen):

$h+1 < 0$: $v = \frac{1}{h+1} \cdot r$ lineare Funktion von r mit der Steigung $\frac{1}{h+1} < 0$ vor $\Rightarrow$ v fällt.

$h+1 > 0$: $v = \frac{1}{h+1} \cdot r$ lineare Funktion von r mit der Steigung $\frac{1}{h+1} > 0$ vor $\Rightarrow$ v wächst

b) auf das Doppelte c) direkte Proportion bzw. keine Proportion

5.58 a) Wie ändert sich v, wenn h wächst? Wenn h wächst, so wird $-h$ kleiner und damit auch $-h+2=2-h$. Der Bruch $v=\frac{r^2}{2-h}$ wird größer (da der Zähler als Quadrat positiv ist). Damit wächst v.

b) Auf das Wievielfache ändert sich v, wenn r verdoppelt wird? Auf das Vierfache.

c) Besteht eine Proportionalität zwischen v und r, v und r^2 bzw. v und h?
Keine Prop. zwischen v und r, direkte Prop. zwischen v und r^2, keine Prop. zwischen v und h.

6 Lineare Gleichungen und Ungleichungen

6.1 a)
$$5v-18=9-2v$$
$$7v=27$$
$$v=\frac{27}{7};\quad L=\left\{\frac{27}{7}\right\}$$

b)
$$7x-6=5x-14-x+10$$
$$3x=2$$
$$x=\frac{2}{3};\quad L=\left\{\frac{2}{3}\right\}$$

6.2 a)
$$10y+14-8y=3y$$
$$14=y;\quad L=\{14\}$$

b)
$$2z-18+8z+1=20+5z-2$$
$$5z=35$$
$$z=7;\quad L=\{7\}$$

6.3 a)
$$10d-(6+4d)=20-(-3d-2)$$
$$10d-6-4d=20+3d+2$$
$$3d=28$$
$$d=\frac{28}{3};\quad L=\left\{\frac{28}{3}\right\}$$

b)
$$14-(x-9)=10+5x-(7x-5)$$
$$14-x+9=10+5x-7x+5$$
$$x=-8;\quad L=\{-8\}$$

6.4 a)
$$3a-[(3-10a)-(6a-15)]=a+9$$
$$3a-(3-10a)+(6a-15)=a+9$$
$$3a-3+10a+6a-15=a+9$$
$$18a=27$$
$$a=\frac{3}{2};\quad L=\left\{\frac{3}{2}\right\}$$

b)
$$4y-[(3y+4)+2]=3\cdot(2y-8)-(3y-24)$$
$$4y-(3y+4)-2=6y-24-3y+24$$
$$4y-3y-4-2=3y$$
$$-2y=6$$
$$y=-3;\quad L=\{-3\}$$

6.5
$$14t+12=18\cdot(5t-24)-[8\cdot(42-t)-9\cdot(512-20t)]+12$$
$$14t+12=90t-432-[336-8t-4608+180t]+12$$
$$14t+12=90t-432-336+8t+4608-180t+12$$
$$96t=3840;\quad t=40;\quad L=\{40\}$$

6.6
$$30x-[10\cdot(x+1)-6\cdot(3x+1)+15\cdot(x-2)+6\cdot(2+x)]-4\cdot(x+1)=10x-4$$
$$30x-[10x+10-18x-6+15x-30+12+6x]-4x-4=10x-4$$
$$30x-[13x-14]-4x-4=10x-4$$
$$30x-13x+14-4x-4=10x-4$$
$$3x=-14$$
$$x=-\frac{14}{3};\quad L=\left\{-\frac{14}{3}\right\}$$

6.7 a)
$$(x+1)\cdot(4x-3)=2\cdot(x+1)\cdot(2x+3)$$
$$4x^2+x-3=2\cdot(2x^2+5x+3)$$
$$4x^2+x-3=4x^2+10x+6$$
$$-9x=9$$
$$x=-1;\quad L=\{-1\}$$

b)
$$(5a+1)\cdot(2a-1)-(3a-5)\cdot(2a+1)=$$
$$=4\cdot(a-1)\cdot(a+3)-4$$
$$10a^2-3a-1-(6a^2-7a-5)=4\cdot(a^2+2a-3)-4$$
$$10a^2-3a-1-6a^2+7a+5=4a^2+8a-12-4$$
$$-4a=-20;\quad a=5;\quad L=\{5\}$$

6.8 a)
$$(z+1)^2-(z-1)^2=8$$
$$z^2+2z+1-(z^2-2z+1)=8$$
$$z^2+2z+1-z^2+2z-1)=8$$
$$4z=8$$
$$z=2;\quad L=\{2\}$$

b)
$$(2y-2)^2+(2y+2)^2=8y^2+4y$$
$$4y^2-8y+4+4y^2+8y+4=8y^2+4y$$
$$-4y=-8$$
$$y=2;\quad L=\{2\}$$

6.9
$$(2d+1)^2+(8d-3)^2=(7d-2)\cdot(11d-1)-(3d+1)^2$$
$$4d^2+4d+1+64d^2-48d+9=77d^2-29d+2-(9d^2+6d+1)$$
$$68d^2-44d+10=77d^2-29d+2-9d^2-6d-1$$
$$-9d=-9;\quad d=1;\quad L=\{1\}$$

6.10
$$2\cdot(s-6)^2+(s-4)^2+(2s-9)^2=(6s-7)\cdot(s-6)+s^2-12s-42$$
$$2\cdot(s^2-12s+36)+(s^2-8s+16)+(4s^2-36s+81)=6s^2-43s+42+s^2-12s-42$$
$$2s^2-24s+72+s^2-8s+16+4s^2-36s+81=7s^2-55s$$
$$2s^2-24s+72+s^2-8s+16+4s^2-36s+81=7s^2-55s$$
$$-13s=-169;\quad s=13;\quad L=\{13\}$$

6.11
$$5\cdot(x-1)^2-2\cdot(x+3)^2=3\cdot(x+2)^2-7\cdot(6x-1)$$
$$5\cdot(x^2-2x+1)-2\cdot(x^2+6x+9)=3\cdot(x^2+4x+4)-7\cdot(6x-1)$$
$$5x^2-10x+5-2x^2-12x-18=3x^2+12x+12-42x+7$$
$$8x=32;\quad x=4;\quad L=\{4\}$$

6.12 a)
$$\frac{x}{4}=9-\frac{x}{5}$$
$$\frac{x}{4}+\frac{x}{5}=9\,|\cdot 20$$
$$5x+4x=180$$
$$9x=180;\quad x=20\quad L=\{20\}$$

b)
$$z-10=\frac{2z}{3}-2-\frac{z}{2}$$
$$z-\frac{2z}{3}+\frac{z}{2}=8\,|\cdot 6$$
$$6z-4z+3z=48$$
$$5z=48;\quad z=\frac{48}{5}\quad L=\left\{\frac{48}{5}\right\}$$

6.13 a)
$$24-\frac{5a}{6}=-\frac{4a}{5}+\frac{5a}{3}-10$$
$$-\frac{5a}{6}+\frac{4a}{5}-\frac{5a}{3}=-34\,|\cdot 30$$
$$-25a+24a-50a=-1020$$
$$-51a=-1020$$
$$a=20;\quad L=\{20\}$$

b)
$$1+\frac{5y}{12}=-\frac{3y}{4}+\frac{4y}{6}$$
$$\frac{5y}{12}+\frac{3y}{4}-\frac{4y}{6}=-1\,|\cdot 12$$
$$5y+9y-8y=-12$$
$$6y=-12$$
$$y=-2;\quad L=\{-2\}$$

6.14 a) $2x-\frac{3}{5}x=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}-\frac{2}{5}x+2\,|\cdot 10$

$20x-6x=15x-5-4x+20$

$14x-15x+4x=-5+20$

$3x=15$

$x=5;\quad L=\{5\}$

b) $2\cdot\frac{1}{3}y-3\cdot\frac{1}{2}y+1=y-5\cdot\frac{1}{3}y+3\cdot\frac{1}{5}y\,|\cdot 30$

$20y-45y+30=30y-50y+18y$

$-25y-30y+50y-18y=-30$

$-23y=-30;\quad y=\frac{30}{23}\quad L=\left\{\frac{30}{23}\right\}$

6.15 a) $\frac{a+2}{7}+\frac{a+3}{8}=2\,|\cdot 56$

$8\cdot(a+2)+7\cdot(a+3)=112$

$8a+16+7a+21=112$

$15a=75;\quad a=5;\quad L=\{5\}$

b) $\frac{b-3}{6}+\frac{b+3}{20}=\frac{9}{4}\,|\cdot 60$

$10\cdot(b-3)+3\cdot(b+3)=135$

$10b-30+3b+9=135$

$13b=156;\quad b=12;\quad L=\{12\}$

6.16 a) $\frac{s+1}{10}+\frac{3-s}{30}-\frac{s+1}{12}=\frac{2s+3}{20}-\frac{s-4}{15}\,|\cdot 60$

$6\cdot(s+1)+2\cdot(3-s)-5\cdot(s+1)=$

$=3\cdot(2s+3)-4\cdot(s-4)$

$6s+6+6-2s-5s-5=6s+9-4s+16$

$-3s=18;\quad s=-6;\quad L=\{-6\}$

b) $\frac{1}{5}-\frac{7-4t}{4}+\frac{3t-5}{10}=\frac{1-16t}{5}-\frac{3}{4}\,|\cdot 40$

$8-10\cdot(7-4t)+4\cdot(3t-5)=8\cdot(1-16t)-30$

$8-70+40t+12t-20=8-128t-30$

$180t=60;\quad t=\frac{1}{3};\quad L=\left\{\frac{1}{3}\right\}$

6.17 a) $x+\frac{2x-7}{2}-\frac{3x+1}{5}=5-\frac{x+6}{2}\,|\cdot 10$

$10x+5\cdot(2x-7)-2\cdot(3x+1)=50-5\cdot(x+6)$

$10x+10x-35-6x-2=50-5x-30$

$19x=57;\quad x=3;\quad L=\{3\}$

b) $\frac{2\cdot(a+1)}{30}+\frac{2a-10}{5}+6=9-\frac{9a-48}{9}\,|\cdot 90$

$6\cdot(a+1)+18\cdot(2a-10)+540=$

$=810-10\cdot(9a-48)$

$6a+6+36a-180+540=810-90a+480$

$132a=924;\quad a=7;\quad L=\{7\}$

6.18 $-\frac{12x-15}{36}+\frac{3}{5}\cdot(2x+11)+10=11-\frac{4x-3}{20}$

$-\frac{12x-15}{36}+\frac{3}{5}\cdot(2x+11)=1-\frac{4x-3}{20}\,|\cdot 180$

$-5\cdot(12x-15)+108\cdot(2x+11)=180-9\cdot(4x-3)$

$-60x+75+216x+1188=180-36x+27;\quad 192x=-1056;\quad x=-\frac{11}{2};\quad L=\left\{-\frac{11}{2}\right\}$

6.19 $\frac{14s-4}{6}+3-\frac{3\cdot(s+2)}{2}+3=-\frac{4}{5}\cdot(s+3)+\frac{4}{5}\cdot s+\frac{1}{5}-\frac{2}{10}\cdot(1-4s)\,|\cdot 30$

$5\cdot(14s-4)+90-45\cdot(s+2)+90=-24\cdot(s+3)+24s+6-6\cdot(1-4s)$

$70s-20+90-45s-90+90=-24s-72+24s+6-6+24s;\quad s=-142;\quad L=\{-142\}$

6.20 a) $x=b-a$ b) $x=2a-b$ c) $x=\frac{a-3b}{2}$

6.21 a) Fall 1: $b\neq 0$: $x=\frac{a}{b}$ Fall 2: $b=0$: $L=\{\}$

b) Fall 1: $a\neq 0$: $x=\frac{2b}{a^2}$ Fall 2: $a=0$: $L=\{\}$

c) Fall 1: $a+b\neq 0$: $x=\frac{1}{a+b}$ Fall 2: $a+b=0$: $L=\{\}$

6.22 a) Fall 1: $b \neq 0$: $x = \frac{3a-b}{4b}$ Fall 2: $b = 0$:
Unterfall I: $3a - b \neq 0$: $L = \{\}$
Unterfall II: $3a - b = 0$: $L = D$

b) Fall 1: $a-b \neq 0$: $x = \frac{b\cdot(a+2)}{a-b}$ Fall 2: $a-b = 0$:
Unterfall I: $b\cdot(a+2) \neq 0$: $L = \{\}$
Unterfall II: $b\cdot(a+2) = 0$: $L = D$

c) Fall 1: $a+b \neq 0$: $x = -\frac{b}{a+b}$ Fall 2: $a+b = 0$:
Unterfall I: $b \neq 0$: $L = \{\}$
Unterfall II: $b = 0$: $L = D$

6.23 a) Fall 1: $x+2 \geq 0 \Rightarrow |x+2| = x+2$
$x+2 = 4;\ x = 2,\ L_1 = \{2\}$
Fall 2: $x+2 < 0 \Rightarrow |x+2| = -(x+2)$
$-(x+2) = 4;\ x = -6,\ L_2 = \{-6\}$
$L = L_1 \cup L_2 = \{2, -6\}$

b) Fall 1: $2x+3 \geq 0 \Rightarrow |2x+3| = 2x+3$
$2x+3 = 4;\ x = 1/2,\ L_1 = \{1/2\}$
Fall 2: $2x+3 < 0 \Rightarrow |2x+3| = -(2x+3)$
$-(2x+3) = 4;\ x = -7/2,\ L_2 = \{-7/2\}$
$L = L_1 \cup L_2 = \{1/2, -7/2\}$

c) Fall 1: $2-x \geq 0 \Rightarrow |2-x| = 2-x$
$2-x = 4;\ x = 6,\ L_1 = \{6\}$
Fall 2: $2-x < 0 \Rightarrow |2-x| = -(2-x)$
$-(2-x) = 4;\ x = -2,\ L_2 = \{-2\}$
$L = L_1 \cup L_2 = \{-2, 6\}$

6.24 a) Fall 1: $x/2+2 \geq 0 \Rightarrow |x/2+2| = x/2+2$
$x/2+2 = 1/2;\ x = -3,\ L_1 = \{-3\}$
Fall 2: $x/2+2 < 0 \Rightarrow |x/2+2| = -(x/2+2)$
$-(x/2+2) = 1/2;\ x = -5,\ L_2 = \{-5\}$
$L = L_1 \cup L_2 = \{-3, -5\}$

b) Fall 1: $2x/3-2 \geq 0 \Rightarrow |2x/3-2| = 2x/3-2$
$2x/3-2 = 1;\ x = 9/2,\ L_1 = \{9/2\}$
Fall 2: $2x/3-2 < 0 \Rightarrow |2x/3-2| = -(2x/3-2)$
$-(2x/3-2) = 1;\ x = 3/2,\ L_2 = \{3/2\}$
$L = L_1 \cup L_2 = \{3/2, 9/2\}$

c) Fall 1: $(2-x)/2 \geq 0 \Rightarrow |(2-x)/2| = (2-x)/2$
$(2-x)/2 = 4;\ x = -6,\ L_1 = \{-6\}$
Fall 2: $(2-x)/2 < 0 \Rightarrow |(2-x)/2| = -(2-x)/2$
$-(2-x)/2 = 4;\ x = 10,\ L_2 = \{10\}$
$L = L_1 \cup L_2 = \{10, -6\}$

6.25 a) Fall 1: $2x/3-1/2 \geq 0 \Rightarrow |\ldots| = 2x/3-1/2$
$2x/3-1/2 = 1;\ x = 9/4,\ L_1 = \{9/4\}$
Fall 2: $2x/3-1/2 < 0 \Rightarrow |\ldots| = -(2x/3-1/2)$
$-(2x/3-1/2) = 1;\ x = -3/4,\ L_2 = \{-3/4\}$
$L = L_1 \cup L_2 = \{9/4, -3/4\}$

b) Fall 1: $(3+x)/4 \geq 0 \Rightarrow |(3+x)/4| = (3+x)/4$
$(3+x)/4 = 6;\ x = 21,\ L_1 = \{21\}$
Fall 2: $(3+x)/4 < 0 \Rightarrow |(3+x)/4| = -(3+x)/4$
$-(3+x)/4 = 6;\ x = -27,\ L_1 = \{-27\}$
$L = L_1 \cup L_2 = \{21, -27\}$

c) Fall 1: $1/3-2x \geq 0 \Rightarrow |1/3-2x| = 1/3-2x$
$1/3-2x = 2;\ x = -5/6,\ L_1 = \{-5/6\}$
Fall 2: $1/3-2x < 0 \Rightarrow |1/3-2x| = -(1/3-2x)$
$-(1/3-2x) = 2;\ x = 7/6,\ L_1 = \{7/6\}$
$L = L_1 \cup L_2 = \{7/6, -5/6\}$

6.26 a) $\frac{6}{x} + 2 = 5 \mid \cdot x \qquad x \neq 0$
$6 + 2x = 5x$
$x = 2 \quad L = \{2\}$

b) $\frac{4}{t} - \frac{5}{t} = 5 \mid \cdot t \qquad t \neq 0$
$4 - 5 = 5t$
$t = -\frac{1}{5} \quad L = \left\{-\frac{1}{5}\right\}$

c) $\frac{1}{a} + 4 = \frac{3}{a} + 2 \mid \cdot a \qquad a \neq 0$
$1 + 4a = 3 + 2a$
$a = 1 \quad L = \{1\}$

6.27 a) $\frac{2}{4x} - \frac{5}{8x} = \frac{1}{8} \mid \cdot 8x \qquad x \neq 0$
$4 - 5 = x$
$x = -1 \quad L = \{-1\}$

b) $\frac{3}{2a} + \frac{10}{4a} = \frac{1}{2} \mid \cdot 4a \qquad a \neq 0$
$6 + 10 = 2a$
$a = 8 \quad L = \{8\}$

c) $\frac{1}{3x} - \frac{1}{6} = \frac{1}{4} \mid \cdot 12x \qquad x \neq 0$
$4 - 2x = 3x$
$x = \frac{4}{5} \quad L = \left\{\frac{4}{5}\right\}$

6.28 a) $x \neq -2\,; x \neq 3$

$\frac{1}{x+2} = \frac{2}{x-3} \mid \cdot (x+2) \cdot (x-3)$

$x - 3 = 2 \cdot (x+2)$

$x - 3 = 2x + 4$

$x = -7; \quad L = \{-7\}$

b) $a \neq -3; \; a \neq 1$

$\frac{a}{a+3} = \frac{2a}{2a-2} \mid \cdot (a+3) \cdot (2a-2)$

$a \cdot (2a-2) = 2a \cdot (a+3)$

$2a^2 - 2a = 2a^2 + 6a$

$a = 0 \quad L = \{0\}$

c) $\frac{t+3}{2\cdot(t-2)} = \frac{4}{3} \mid \cdot 6 \cdot (t-2), \quad t \neq 2$

$3 \cdot (t+3) = 8 \cdot (t-2)$

$3t + 9 = 8t - 16$

$-5t = -25 \rightarrow t = 5 \quad L = \{5\}$

6.29 a) $s \neq 3; \; s \neq -4$

$\frac{s-2}{s-3} = \frac{s+6}{s+4} \mid \cdot (s-3) \cdot (s+4)$

$(s-2) \cdot (s+4) = (s+6) \cdot (s-3)$

$s^2 + 2s - 8 = s^2 + 3s - 18$

$-s = -10; \quad s = 10; \quad L = \{10\}$

b) $\frac{x+1}{x+5} - 2 = -\frac{x+3}{x-1} \mid \cdot (x+5) \cdot (x-1); \quad s \neq -5\,; x \neq 1$

$(x+1) \cdot (x-1) - 2 \cdot (x+5) \cdot (x-1) = -(x+3) \cdot (x+5)$

$x^2 - 1 - 2 \cdot (x^2 + 4x - 5) = -(x^2 + 8x + 15)$

$x^2 - 1 - 2x^2 - 8x + 10 = -x^2 - 8x - 15$

$-8x + 9 = -8x - 15$

$0 \cdot x + 24 = 0; \quad L = \{\ \}$

c) $\frac{a+4}{a-3} = \frac{a+6}{a-2} \mid \cdot (a-3) \cdot (a-2); \quad a \neq 3; \; a \neq 2$

$(a+4) \cdot (a-2) = (a+6) \cdot (a-3)$

$a^2 + 2a - 8 = a^2 + 3a - 18$

$-a = -10; \quad a = 10; \quad L = \{10\}$

6.30 a) $x \neq 1; \; x \neq 2; \; x \neq 3$

$\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x-3} = 0 \mid \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)$

$(x-2) \cdot (x-3) - 2 \cdot (x-1) \cdot (x-3) +$

$+ (x-1) \cdot (x-2) = 0$

$x^2 - 5x + 6 - 2 \cdot (x^2 - 4x + 3) + (x^2 - 3x + 2) = 0$

$x^2 - 5x + 6 - 2x^2 + 8x - 6 + x^2 - 3x + 2 = 0$

$0 \cdot x + 2 = 0; \quad L = \{\ \}$

b) $x \neq 0\,; \; x \neq 2$

$\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x} \mid \cdot x \cdot (x-2)^2$

$x + x \cdot (x-2) = (x-2)^2$

$x + x^2 - 2x = x^2 - 4x + 4$

$3x = 4; \quad x = \frac{4}{3}; \quad L = \left\{\frac{4}{3}\right\}$

6.31 a) $x \neq -3\,; \; x \neq 3$

$\frac{1}{3-x} + \frac{1}{3+x} = \frac{6}{9-x^2} = 0 \mid \cdot (3-x) \cdot (3+x)$

$3 + x + 3 - x = 6$

$x + 6 = x + 6; \quad L = D$

b) $\frac{1}{2a-6} + \frac{1}{a+3} = \frac{3}{(a+3)\cdot(a-3)} = 0 \mid \cdot 2 \cdot (a+3) \cdot (a-3); \qquad a \neq -3\,; a \neq 3$

$a + 3 + 2 \cdot (a-3) = 6$

$a + 3 + 2a - 6 = 6$

$3a = 9; \quad a = 3; \quad L = \{\ \}$, da 3 nicht in D

6.32 a) $d \neq 0;\ d \neq -4$

$\frac{1}{d+4} = \frac{1}{3d+12} - \frac{1}{3d} \mid \cdot 3d \cdot (d+4)$

$3d = d - (d+4)$

$3d = -4;\quad d = -\frac{4}{3};\quad L = \left\{-\frac{4}{3}\right\}$

b) $\frac{10}{2\cdot(2t+2)} = \frac{2}{2t+2} + \frac{1}{t} \quad t \neq 0;\ t \neq -1$

$\frac{5}{2\cdot(t+1)} = \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t} \mid \cdot 2t \cdot (t+1)$

$5t = 2t + 2\cdot(t+1)$

$t = 2;\quad L = \{2\}$

6.33 a) $b \neq 4$

$\frac{b+2}{b-4} + \frac{2b+1}{3b-12} = \frac{3\cdot(b-1)}{b-4} \mid \cdot 3 \cdot (b-4)$

$3\cdot(b+2) + 2b + 1 = 9\cdot(b-1)$

$3b + 6 + 2b + 1 = 9\cdot(b-1)$

$-4b = -16;$

$b = 4;\quad L = \{\ \}$, da 4 nicht in D

b) $a \neq -1;\ a \neq 1$

$\frac{a+2}{a+1} + \frac{3-2a}{a-1} = -\frac{(a+4)^2}{a^2-1} \mid \cdot (a+1)\cdot(a-1)$

$(a+2)\cdot(a-1) + (3-2a)\cdot(a+1) = -(a^2+8a+16)$

$a^2 + a - 2 - 2a^2 + a + 3 = -a^2 - 8a - 16$

$10a = -17;\quad a = -\frac{17}{10};\quad L = \left\{-\frac{17}{10}\right\}$

6.34 a) $\frac{7}{6t-5} = \frac{2\cdot(8t-9)}{10-12t} + \frac{12t+4}{9t-4};\quad t \neq \frac{4}{9};\ t \neq \frac{5}{6}$

$\frac{7}{6t-5} = \frac{9-8t}{6t-5} + \frac{12t+4}{9t-4} \mid \cdot (6t-5)\cdot(9t-4)$

$7\cdot(9t-4) = (9-8t)\cdot(9t-4) + (12t+4)\cdot(6t-5)$

$-14t = -28$

$t = 2;\quad L = \{2\}$

b) $\frac{25}{5x-45} + \frac{28}{35-7x} = \frac{9}{x-5};\quad x \neq 9;\ x \neq 5$

$\frac{5}{x-9} - \frac{4}{x-5} = \frac{9}{x-5} \mid \cdot (x-9)\cdot(x-5)$

$5\cdot(x-5) - 4\cdot(x-9) = 9\cdot(x-9)$

$5x - 25 - 4x + 36 = 9x - 81$

$x = \frac{23}{2};\quad L = \left\{\frac{23}{2}\right\}$

6.35 a) $\frac{2a+5}{2\cdot(a-2)} = \frac{3a^2-2a+5}{a^2-4} - \frac{6a+5}{3\cdot(a+2)} \mid \cdot 6 \cdot (a+2)\cdot(a-2);\qquad a \neq -2;\ a \neq 2$

$3\cdot(2a+5)\cdot(a+2) = 6\cdot(3a^2-2a+5) - 2\cdot(6a+5)\cdot(a-2)$

$3\cdot(2a^2+9a+10) = 6\cdot(3a^2-2a+5) - 2\cdot(6a^2-7a-10)$

$25a = 20;\quad a = \frac{4}{5}\quad L = \left\{\frac{4}{5}\right\}$

b) $\frac{3t-5}{3\cdot(t-1)} - \frac{2t-7}{2\cdot(t+1)} = \frac{19t-3}{6\cdot(t^2-1)} \mid \cdot 6(t+1)(t-1);\qquad t \neq -1;\ t \neq 1$

$2\cdot(3t-5)\cdot(t+1) - 3\cdot(2t-7)\cdot(t-1) = 19t - 3$

$6t^2 - 4t - 10 - 6t^2 + 27t - 21 = 19t - 3$

$4t = 28;\quad t = 7\quad L = \{7\}$

6.36 a) $\frac{3x+2}{x-2} + \frac{5x-2}{x+2} = \frac{8x^2-5x+18}{x^2-4} \mid \cdot (x-2)\cdot(x+2);\qquad x \neq -2;\ x \neq 2$

$(3x+2)\cdot(x+2) + (5x-2)\cdot(x-2) = 8x^2 - 5x + 18$

$3x^2 + 8x + 4 + 5x^2 - 12x + 4 = 8x^2 - 5x + 18$

$x = 10;\quad L = \{10\}$

b) $\frac{2\cdot(7x^2+2)}{4x^2-1} = \frac{3x-1}{2x+1} + \frac{4x+1}{2x-1} \mid \cdot (2x-1)\cdot(2x+1);\qquad x \neq -\frac{1}{2};\ x \neq \frac{1}{2}$

$2\cdot(7x^2+2) = (3x-1)\cdot(2x-1) + (4x+1)\cdot(2x+1)$

$14x^2 + 4 = 6x^2 - 5x + 1 + 8x^2 + 6x + 1$

$x = 2;\quad L = \{2\}$

6.37 a) $x \neq -3;\ x \neq 3$

$\frac{3}{x-3} - \frac{5}{x+3} = -\frac{2x}{x^2-9} \quad | \cdot (x-3)\cdot(x+3)$

$3\cdot(x+3) - 5\cdot(x-3) = -2x$

$3x + 9 - 5x + 15 = -2x$

$24 = 0$ ... falsche Aussage, $L = \{\ \}$

b) $x \neq -3;\ x \neq 3$

$\frac{x-3}{x+3} - \frac{x+3}{x-3} = \frac{3x}{x^2-9} \quad | \cdot (x-3)\cdot(x+3)$

$(x-3)^2 - (x+3)^2 = 3x$

$x^2 - 6x + 9 - x^2 - 6x - 9 = 3x$

$-9x = 0; \quad L = \{0\}$

6.38 a) $\frac{x+6}{x-5} + \frac{2x-3}{2x-10} = \frac{4}{4x-20}; \qquad x \neq 5$

$\frac{x+6}{x-5} + \frac{2x-3}{2\cdot(x-5)} = \frac{4}{4\cdot(x-5)} \quad | \cdot 4\cdot(x-5)$

$4\cdot(x+6) + 2\cdot(2x-3) = 4$

$4x + 24 + 4x - 6 = 4$

$8x = -14; \quad x = -\frac{7}{4}; \quad L = \left\{-\frac{7}{4}\right\}$

b) $\frac{a-3}{2-a} - \frac{a}{4-2a} = \frac{2a+3}{6-3a} + \frac{1}{a-2}; \qquad a \neq 2$

$\frac{a-3}{2-a} - \frac{a}{2\cdot(2-a)} = \frac{2a+3}{3\cdot(2-a)} - \frac{1}{2-a} \quad | \cdot 6\cdot(2-a)$

$6\cdot(a-3) - 3a = 2\cdot(2a+3) - 6$

$6a - 18 - 3a = 4a + 6 - 6$

$a = -18; \quad L = \{-18\}$

6.39 a) $\frac{3}{2\cdot(b+1)} - \frac{2b+5}{b+1} = \frac{1}{10\cdot(b+1)} \quad | \cdot 10\cdot(b+1); \qquad b \neq -1$

$15 - 10\cdot(2b+5) = 1$

$-20b = 36; \quad b = -\frac{9}{5} \quad L = \left\{-\frac{9}{5}\right\}$

b) $\frac{(3a-5)^2}{a+1} - \frac{(3a+5)^2}{a-1} = \frac{-78a^2+5a}{a^2-1} \quad | \cdot (a+1)\cdot(a-1) \qquad a \neq -1;\ a \neq 1$

$(9a^2 - 30a + 25)\cdot(a-1) - (9a^2 + 30a + 25)\cdot(a+1) = -78a^2 + 5a$

$9a^3 - 39a^2 + 55a - 25 - (9a^3 + 39a^2 + 55a + 25) = -78a^2 + 5a$

$-5a = 50; \quad a = -10 \quad L = \{-10\}$

6.40 a) $\frac{w+1}{w-2} + \frac{2w}{2w-4} + \frac{w-4}{6-3w} = 0; \qquad w \neq 2$

$\frac{w+1}{w-2} + \frac{2w}{2\cdot(w-2)} + \frac{4-w}{3\cdot(w-2)} = 0 \quad | \cdot 6\cdot(w-2)$

$6\cdot(w+1) + 6w + 2\cdot(4-w) = 0$

$10w = -14; \quad w = -\frac{7}{5} \quad L = \left\{-\frac{7}{5}\right\}$

b) $\frac{2x-8}{x} + \frac{2x^2-4}{x^2} = \frac{4x-4}{x^2} \quad | \cdot x^2; \qquad x \neq 0$

$x\cdot(2x-8) + (2x^2-4) = 4x - 4$

$2x^2 - 8x + 2x^2 - 4 = 4x - 4$

$4x^2 = 12x; \quad 4x^2 - 12x = 0$

$4x\cdot(x-3) = 0$ ... Produkt – Null – Satz $\Rightarrow$

$x_1 = 0;\ x_2 = 3;$ da 0 nicht in D: $L = \{3\}$

6.41 a) $\frac{5x+2}{x-1} + \frac{2+x}{(x-1)\cdot(5x-2)} = \frac{25x-2}{5x-2} \quad | \cdot (x-1)\cdot(5x-2); \quad x \neq 1;\ x \neq \frac{2}{5}$

$(5x+2)\cdot(5x-2) + (2+x) = (25x-2)\cdot(x-1)$

$25x^2 - 4 + 2 + x = 25x^2 - 27x + 2; \quad 28x = 4; \quad x = \frac{1}{7} \quad L = \left\{\frac{1}{7}\right\}$

b) $\frac{(s+2)\cdot(s-1)}{s-1} + \frac{(1-s)\cdot(2-s)}{s+3} = \frac{2s^3+4}{s^2+2x-3} \quad | \cdot (s-1)\cdot(s+3); \qquad s \neq 1;\ s \neq -3$

$(s+2)\cdot(s-1)\cdot(s+3) + (s-1)^2\cdot(s-2) = 2s^3 + 4$

$s^3 + 4s^2 + s - 6 + s^3 - 4s^2 + 5s - 2 = 2s^3 + 4$

$6s = 12; \quad s = 2 \quad L = \{2\}$

6.42 $\frac{a-2}{(2a+3)^2}-\frac{a-2}{(a+1)^2}=\frac{-3a^3-4a^2+11a+17}{(a+1)^2\cdot(2a+3)^2}\ |\cdot(a+1)\cdot(2a+3);\qquad a\neq-1;\ a\neq-\frac{3}{2}$

$(a-2)\cdot(a+1)^2-(a-2)\cdot(2a+3)^2=-3a^3-4a^2+11a+17$

$a^3-3a-2-(4a^3+4a^2-15a-18)=-3a^3-4a^2+11a+17$

$a^3-3a-2-4a^3-4a^2+15a+18=-3a^3-4a^2+11a+17$

$a=1;\quad L=\{1\}$

6.43 $x\neq0;x\neq-1;\ x\neq1$

$\frac{2x+1}{x\cdot(x-1)}-\frac{4x-1}{x\cdot(x+1)}=\frac{-2x^3+8x^2-4x+4}{x^2\cdot(x^2-1)}\ |\cdot x^2\cdot(x+1)\cdot(x-1)$

$(2x+1)\cdot x\cdot(x+1)-(4x-1)\cdot x\cdot(x-1)=-2x^3+8x^2-4x+4$

$2x^3+3x^2+x-(4x^3-5x^2+x)=-2x^3+8x^2-4x+4$

$2x^3+3x^2+x-4x^3+5x^2-x=-2x^3+8x^2-4x+4$

$4x=4$

$x=1;$ 1 nicht in D, daher $L=\{\ \}$

6.44 $\frac{2b}{(b-1)^2}-\frac{4}{(b-1)\cdot(b+1)}=\frac{2b}{(b+1)^2}+\frac{4}{b^2-1}|\cdot(b+1)^2\cdot(b-1)^2;\qquad b\neq-1;\ b\neq1$

$2b\cdot(b+1)^2-4\cdot(b^2-1)=2b\cdot(b-1)^2+4\cdot(b^2-1)$

$2b^3+4b^2+2b-4b^2+4=2b^3-4b^2+2b+4b^2-4$

$8\neq0;\quad L=\{\ \}$

6.45 $x\neq3;\ x\neq4;\ x\neq5;\ x\neq7$

$\frac{1}{7-x}+\frac{4}{4-x}=\frac{1}{3-x}+\frac{4}{5-x}|\cdot(3-x)\cdot(4-x)\cdot(5-x)\cdot(7-x)$

$(3-x)\cdot(4-x)\cdot(5-x)+4\cdot(3-x)\cdot(5-x)\cdot(7-x)=$

$=(4-x)\cdot(5-x)\cdot(7-x)+4\cdot(3-x)\cdot(4-x)\cdot(7-x)$

$-x^3+12x^2-47x+60-4x^3+60x^2-284x+420=$

$=-x^3+16x^2-83x+140-4x^3+56x^2-244x+336$

$-4x=-4$

$x=1;\quad L=\{1\}$

6.46 $a\neq-1;\ a\neq2;\ a\neq-3;\ a\neq3$

$\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+3}-\frac{2}{a-3}+\frac{2}{a-2}=0\,|\cdot(a+1)\cdot(a-2)\cdot(a+3)\cdot(a-3)$

$(a-2)\cdot(a+3)\cdot(a-3)-(a+1)\cdot(a-2)\cdot(a-3)-$

$-2\cdot(a+1)\cdot(a-2)\cdot(a+3)+2\cdot(a+1)\cdot(a+3)\cdot(a-3)=0$

$a^3-2a^2-9a+18-a^3+4a^2-a-6-2a^3-4a^2+10a+12+2a^3+2a^2-18a-18=0$

$-18a+6=0$

$x=\frac{1}{3};\quad L=\left\{\frac{1}{3}\right\}$

6.47 a)

$$\frac{\frac{2\cdot(a+1)}{3}}{\frac{a-3}{2}}=4; \qquad a\neq 3$$

$$\frac{2a+2}{3}\cdot\frac{2}{a-3}=4\,|\cdot 3\cdot(a-3)$$

$$4a+4=12a-36$$

$$-8a=-40; \quad a=5; \quad L=\{5\}$$

6.47 b)

$$\frac{\frac{(x-1)^2}{3}}{\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{x^2}{12}}=1; \qquad D=R$$

$$\frac{\frac{(x-1)^2}{3}}{\frac{3\cdot(x+1)^2+x^2}{12}}=1$$

$$\frac{x^2-2x+1}{3}\cdot\frac{12}{4x^2+6x+3}=1$$

$$(x^2-2x+1)\cdot 12=3\cdot(4x^2+6x+3)$$

$$12x^2-24x+12=12x^2+18x+9$$

$$-42x=-3; \quad x=\frac{1}{14}; \quad L=\left\{\frac{1}{14}\right\}$$

6.47 c)

$$\frac{\frac{2x+5}{6}}{\frac{8x-2}{3}+1}=2 \qquad x\neq -\frac{1}{8}$$

$$\frac{\frac{2x+5}{6}}{\frac{8x-2+3}{3}}=2$$

$$\frac{2x+5}{6}\cdot\frac{3}{8x+1}=2$$

$$(2x+5)\cdot 3=12\cdot(8x+1)$$

$$2x+5=32x+4$$

$$-30x=-1; \quad x=\frac{1}{30};$$

$$L=\left\{\frac{1}{30}\right\}$$

6.48 a)

$$\frac{x-a}{x+a}=4 \qquad x\neq -a$$

$$x-a=4x+4a$$

$$-3x=5a$$

$$x=-\frac{5a}{3}$$

6.48 b) $\frac{3}{a+x}-4=b; \quad x\neq -a$

$$\frac{3}{b+4}=a+x$$

$$x=\frac{3}{b+4}-a$$

6.48 c) $\frac{2\cdot(a+x)}{x-b}=a; \quad x\neq b$

$$2a+2x=a\cdot x-a\cdot b$$

$$a\cdot x-2x=2a+ab$$

$$x\cdot(a-2)=a\cdot(b+2)$$

$$x=\frac{a\cdot(b+2)}{a-2}$$

6.49 a)

$$\frac{2x+a}{2x-a}-\frac{a\cdot x}{2x-a}=0; \quad x\neq\frac{a}{2}$$

$$2x+a-a\cdot x=0$$

$$x\cdot(a-2)=a$$

$$x=\frac{a}{a-2}$$

6.49 b)

$$\frac{a}{x-b}+\frac{b\cdot x}{x-b}=\frac{a+b}{x-b}; \quad x\neq b$$

$$a+b\cdot x=a+b$$

$$x=1$$

6.50 a)

$$\frac{b}{2-x}+\frac{a}{3-x}=\frac{a+b}{(2-x)\cdot(3-x)}; \quad x\neq 2\,; x\neq 3$$

$$b\cdot(3-x)+a\cdot(2-x)=a+b$$

$$3b-b\cdot x+2a-a\cdot x=a+b$$

$$a+2b=a\cdot x+b\cdot x$$

$$x=\frac{a+2b}{a+b}$$

6.50 b)

$$\frac{3-x}{b+x}+\frac{4-x}{b-x}=\frac{b\cdot(4-2x)}{b^2-x^2}; \quad x\neq b\,; x\neq -b$$

$$(3-x)\cdot(b-x)+(4-x)\cdot(b+x)=4b-2b\cdot x$$

$$3b-b\cdot x-3x+x^2+4b-b\cdot x+4x-x^2=4b-2b\cdot x$$

$$x=-3b$$

6.51 $A=1-2\cdot\left(1-\frac{a-2b}{b}\right)^{-1}; \quad b=?$

$$\frac{1-A}{2}=\left(\frac{-a+3b}{b}\right)^{-1}$$

$$\frac{1-A}{2}=\frac{b}{-a+3b}$$

$$-a+A\cdot a+3b-3A\cdot b=2b$$

$$3A\cdot b-a=A\cdot a-a$$

$$b=\frac{a\cdot(A-1)}{3A-1}$$

6.52 $h=\frac{A}{2}\cdot\left(a+\frac{b\cdot A}{2c}\right)-1; \quad b=?$

$$h=\frac{a\cdot A}{2}+\frac{b\cdot A^2}{4c}-1$$

$$4\cdot h\cdot c=2c\cdot a\cdot A+b\cdot A^2-4c$$

$$4\cdot h\cdot c-2c\cdot a\cdot A+4c=b\cdot A^2$$

$$b=\frac{2c\cdot(2h-a\cdot A+2)}{A^2}$$

6.53 $c=\frac{a}{2}\cdot\left(\frac{4}{b}-m\cdot\frac{1+b}{b}\right);\quad m=?$

$$c=\frac{4a}{2b}-\frac{a\cdot m\cdot(1+b)}{2b}$$
$$2b\cdot c=4a-a\cdot m-a\cdot b\cdot m$$
$$2b\cdot c-4a=-m\cdot a\cdot(1+b)$$
$$m=\frac{2\cdot(2a-b\cdot c)}{a\cdot(1+b)}$$

6.54 $a=\frac{2}{x}-\frac{n+x}{3x}\cdot b;\quad n=?$

$$3a\cdot x=6-(n+x)\cdot b$$
$$3a\cdot x=6-b\cdot n-b\cdot x$$
$$b\cdot n=6-b\cdot x-3a\cdot x$$
$$n=\frac{6-b\cdot x-3a\cdot x}{b}$$

6.55 $w=\frac{1}{2}\cdot v\cdot\left[1-\frac{1+k}{1+m_1/m_2}\right];\quad m_2=?$

$$w=\frac{v}{2}\cdot\left[1-\frac{(1+k)\cdot m_2}{m_1+m_2}\right]$$
$$w=\frac{v}{2}\cdot\frac{m_1+m_2-m_2-k\cdot m_2}{m_1+m_2}$$
$$2w\cdot m_1+2w\cdot m_2=v\cdot m_1-k\cdot v\cdot m_2$$
$$2w\cdot m_2+k\cdot v\cdot m_2=v\cdot m_1-2w\cdot m_1$$
$$m_2=\frac{m_1\cdot(v-2w)}{2w+k\cdot v}$$

6.56 $\frac{A}{2}=\frac{1}{a\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{1}{b}};\quad x=?$

$$\frac{A}{2}=\frac{b}{a\cdot\frac{y-x}{x\cdot y}}=\frac{b\cdot x\cdot y}{a\cdot y-a\cdot x}$$
$$A\cdot a\cdot y-A\cdot a\cdot x=2b\cdot x\cdot y$$
$$A\cdot a\cdot y=2b\cdot x\cdot y+A\cdot a\cdot x$$
$$x=\frac{A\cdot a\cdot y}{2b\cdot y+A\cdot a}$$

6.57 $a=\frac{1}{2b}-\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b\cdot c}\right)\cdot\frac{2}{3};\quad c=?$

$$a=\frac{1}{2b}-\frac{2b+2}{3b\cdot c}$$
$$6a\cdot b\cdot c=3c-4b-4$$
$$4b+4=3c-6a\cdot b\cdot c$$
$$c=\frac{4\cdot(b+1)}{3\cdot(1-2a\cdot b)}$$

6.58 $n=b-2\cdot\frac{c-b}{h}\cdot(y-1)\cdot\frac{2}{z};\quad b=?$

$$n=b-\frac{4\cdot(c-b)\cdot(y-1)}{h\cdot z}$$
$$n=\frac{b\cdot h\cdot z-4\cdot(c\cdot y-b\cdot y-c+b)}{h\cdot z}$$
$$n=\frac{b\cdot h\cdot z-4c\cdot y+4b\cdot y+4c-4b}{h\cdot z}$$
$$h\cdot n\cdot z=b\cdot h\cdot z-4c\cdot y+4b\cdot y+4c-4b$$
$$4b-4b\cdot y-b\cdot h\cdot z=4c-4c\cdot y-n\cdot h\cdot z$$
$$b=\frac{4c-4c\cdot y-h\cdot n\cdot z}{4-4y-h\cdot z}=\frac{4c\cdot y+h\cdot n\cdot z-4c}{4y+h\cdot z-4}$$

6.59 $P=Q\cdot\frac{b\cdot x\cdot\frac{1}{a}}{1-\left(\frac{b}{a}+x\right)};\quad b=?$

$$P=\frac{Q\cdot b\cdot x}{1-\frac{b+a\cdot x}{a}}\cdot\frac{1}{a}$$
$$P=\frac{Q\cdot b\cdot x}{\frac{a-(b+a\cdot x)}{a}}\cdot\frac{1}{a}$$
$$a\cdot P-b\cdot P-a\cdot P\cdot x=b\cdot Q\cdot x$$
$$a\cdot P\cdot(1-x)=b\cdot(P+Q\cdot x)$$
$$b=\frac{a\cdot P\cdot(1-x)}{P+Q\cdot x}$$

6.60 $m=1-\frac{c}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}};\quad y=?$

$$m-1=-\frac{c}{\frac{y-x}{x\cdot y}}=-\frac{c\cdot x\cdot y}{y-x}$$
$$y\cdot(m-1)-x\cdot(m-1)=-c\cdot x\cdot y$$
$$y\cdot(m-1)+c\cdot x\cdot y=x\cdot(m-1)$$
$$y=\frac{x\cdot(m-1)}{m-1+c\cdot x}$$

6.61 $R = S\cdot\left(1+\frac{1-k}{1+a/b}\right)\quad a=?$

$R = S\cdot\left(1+\frac{b\cdot(1-k)}{a+b}\right)$

$R = S\cdot\frac{a+b+b-b\cdot k)}{a+b}$

$R\cdot a+R\cdot b = S\cdot a+S\cdot 2b-S\cdot b\cdot k$

$R\cdot a-S\cdot a = S\cdot 2b-S\cdot b\cdot k-R\cdot b$

$a = \frac{b\cdot(2S-k\cdot S-R)}{R-S} = \frac{b\cdot(R+k\cdot S-2S)}{S-R}$

6.62 $u = \frac{1}{2}-\frac{x}{x+1/b}\;;\quad x=?$

$u = \frac{1}{2}-\frac{b\cdot x}{b\cdot x+1}$

$u\cdot 2\cdot(b\cdot x+1) = b\cdot x+1-2b\cdot x$

$2b\cdot u\cdot x+2u = 1-b\cdot x$

$2b\cdot u\cdot x+b\cdot x = 1-2u$

$x = \frac{1-2u}{b\cdot(1+2u)}$

6.63 $A = \frac{x}{b}-\frac{a}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}-\frac{x+3}{b}\right)\;;\quad x=?$

$A = \frac{x}{b}-\frac{a}{2}\cdot\frac{b\cdot x-2\cdot(x+3)}{2b}$

$A = \frac{x}{b}-\frac{a\cdot b\cdot x-2a\cdot x-6a}{4b}$

$4b\cdot A = 4x-(a\cdot b\cdot x-2a\cdot x-6a)$

$4b\cdot A = 4x-a\cdot b\cdot x+2a\cdot x+6a$

$4b\cdot A-6a = x\cdot(4-a\cdot b+2a)$

$x = \frac{2\cdot(2b\cdot A-3a)}{4-a\cdot b+2a}$

6.64 $a = 3\cdot\frac{x}{b}-\frac{b\cdot x+1/2}{2b}\;;\quad x=?$

$a = \frac{3x}{b}-\frac{2b\cdot x+1}{4b}$

$a = \frac{12x-2b\cdot x-1}{4b}$

$4a\cdot b = 12x-2b\cdot x-1$

$4a\cdot b+1 = 2x\cdot(6-b)$

$x = \frac{4a\cdot b+1}{2\cdot(6-b)}$

6.65 Seiten: x, $x + 8$; $2\cdot(x + x + 8) = 144 \Rightarrow x = 32$; Seiten: 32 cm und 40 cm

6.66 Seiten: x, $x + 250$; $2\cdot(x + x + 250) = 5000 \Rightarrow x = 1125$; Seiten: 1125 m und 1375 m

6.67 $a = \frac{b}{4}$, $c = b-8$; $\frac{b}{4}+b+b-8 = 19 \Rightarrow b = 12$ cm; $a = 3$ cm; $c = 4$ cm

6.68 Katheten: a, b; Hypotenuse: c; $a = 30$ cm; $b = c - 10$; $30^2 + (c-10)^2 = c^2 \Rightarrow 20\cdot c = 1000$ oder $c = 50$ cm; $b = 50 - 10 = 40$ cm

6.69 Quadratseite: x; $2a + 2b = 60 = 4x \Rightarrow x = 15$ cm

6.70 1. Seite: x; 2. Seite: x; 3. Seite: x+3; 4. Seite: x + 4; 5. Seite: x - 4;
$x; + x + x+3 + x + 4 + x - 4 = 28 \Rightarrow x = 5$ cm; Seiten: 5 cm, 5 cm, 8 cm, 9 cm, 1 cm

6.71 Kantenlänge a bzw. a + 10; $6a^2 + 3240 = 6\cdot(a+10)^2$, $6a^2 + 3240 = 6a^2 + 120a + 600$; $120\cdot a = 2640$ oder $a = 22$; Kantenlängen: 22 cm und 32 cm

6.72 Ursprüngliche Höhe: h; $2\cdot 10^2 + 4\cdot 10\cdot h + 400 = 2\cdot 10^2 + 4\cdot 10\cdot 3h \Rightarrow h = 5$ cm

6.73 $s = d = 2r$; $M = \pi\cdot r\cdot s$; $\pi\cdot\frac{s}{2}\cdot s+22\pi = \pi\cdot\left(\frac{s}{2}+1\right)\cdot s$; $\frac{s^2}{2}+22 = \frac{s^2}{2}+s \Rightarrow s = 22$ cm; $r = 11$ cm

6.74 Höhe der ursprünglichen Seitenfläche: h_S; $O = a^2 + 2a\cdot h_S$; $100 + 20\cdot h_S + 160 = 100 + 40\cdot h_S \Rightarrow$ $h_S = 8$ cm; neue Höhe: 16 cm

6.75 Grundkante a; Höhe: h; die Grundfläche G des Sechseckes besteht aus 6 gleichseitigen Dreiecken der Seite a; $G = 6\cdot\frac{a^2}{4}\cdot\sqrt{3}$; $V = G\cdot h$; $6\cdot\frac{a^2}{4}\cdot\sqrt{3}\cdot 4+96\cdot\sqrt{3} = 6\cdot\frac{(a+2)^2}{4}\cdot\sqrt{3}\cdot 4 \Rightarrow a = 3$;
Grundkanten: 3 cm und 5 cm

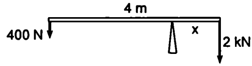
6.76 $36 \cdot 20 = x \cdot 15 \Rightarrow x = 48$ Stufen

6.77 1. Teil: x, 2. Teil: x + 5, 3. Teil: x + 14; $x + x + 5 + x + 14 = 40 \Rightarrow x = 7$; Teile: 7 m, 12 m, 21 m

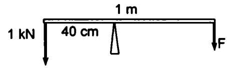
6.78 Gesamtfläche: A; Weideland: 160 ha, Wald: $0{,}6 \cdot A$; $140 + 0{,}6 \cdot A = A \Rightarrow A = 375$ ha

6.79 Kraft mal Kraftarm = Last mal Lastarm;

$(4 - x) \cdot 400 = 2000 \cdot x$; $x = \frac{2}{3}$ m



6.80 $1000 \cdot 0{,}4 = (1 - 0{,}4) \cdot F$; $F = \frac{2000}{3}$ N ≈ 667 N



6.81 Sportler der restlichen Mannschaft: x; Stellvertreter: 3x; Kapitän: 6x;
$x + x + x + 3x + 6x = 240000 \Rightarrow x = 20000$. Die drei Sportler erhalten je € 20 000,- , der Stellvertreter € 60 000,- , der Kapitän € 120 000,.-

6.82 1. Spieler: x ; 2. Spieler: x – 3000; 3. Spieler: $2 \cdot (x - 3000)$;

$x = \frac{2}{5} \cdot \left[(x - 3000) + 2 \cdot (x - 3000)\right] \Rightarrow x = 18000$;

1. Spieler: € 18 000; 2. Spieler: € 15 000; 3. Spieler: € 30 000; Gewinn: € 63 000

6.83 100-W-Lampen: x ; 75-W-Lampen: 50 – x; $100 \cdot x + 75 \cdot (50 - x) = 4625 \Rightarrow x = 35$;
100-W-Lampen: 35 Stück ; 75-W-Lampen: 15 Stück

6.84 Höhe der ursprünglichen Flüssigkeitsmenge: h; $8\, h \cdot \rho + 6{,}48 = 8 \cdot (h + 1) \cdot \rho \Rightarrow \rho = 0{,}81$ kg dm^{-3}

6.85

Material	Masse	davon Sn
CuSn2	x	0,02·x
CuSn8	30 – x	0,08·(30 – x)
Mischung	30	30·0,06

$0{,}02 \cdot x + 0{,}08 \cdot (30 - x) = 30 \cdot 0{,}06 \Rightarrow$
x = 10; CuSn2: 10 kg; CuSn8: 20 kg

6.86

Material	Masse	davon Salz
Meerwasser	20	0,04·20
reines Wasser	x	0
Mischung	20–x	0,1·(20-x)

$0{,}04 \cdot 20 + 0 = 0{,}1 \cdot (20 - x) \Rightarrow x = 12$.
20 kg (20 l) Wasser verdampfen.

6.87 0,92 dm^3 Cu besitzt die Masse 0,92·8,93 kg; 0,08 dm^3 Sn besitzt die Masse 0,08·7,20 kg; zusammen hat die "Mischung" CuSn8 8,79 kg bei 1 dm^3; daher $\rho = 8{,}79$ kg/dm^3

6.88

Material	Masse	Volumen
Kupfer	x	x/8,93
Zink	3-x	(3-x)/7,12
Mischung	3	3/8,42

$\frac{x}{8{,}93} + \frac{3 - x}{7{,}12} = \frac{3}{8{,}42} \Rightarrow x = 2{,}29$

2,29 kg Cu, 0,71 kg Zn

6.89

Material	Volumen	davon Alkohol
20%-Alk.	12 l	0,2·12 l
30%-Alk.	24 l	0,3·24 l
Mischung	36 l	x·36 l

$0{,}2 \cdot 12 + 0{,}3 \cdot 24 = x \cdot 36 \Rightarrow x \approx 0{,}27 = 27\%$
Die Mischung ist 27-prozentig

6.90

Material	Volumen	davon Alkohol
45%-Alk.	20 l	0,45·20 l
Wasser	x	0 l
Mischung	20 + x	0,4·(20+x)

$0{,}45 \cdot 20 + 0 = 0{,}4 \cdot (20 + x) \Rightarrow x = 2{,}5$ l
Man muss 2,5 l Wasser beimengen.

6.91

Material	Volumen	davon Alkohol
90%-Alk.	x - 18	0,9·(x-18)
Wasser	18	0
Mischung	x	0,8·x

$0{,}9 \cdot (x - 18) = 0{,}8 \cdot x \Rightarrow x = 162$
Im Behälter sind 162 l.

6.92

Material	Masse	davon Cu
Kupfer	40	40
Zink	x	0
Mischung	40+x	0,8·(40+x)

$40 = 0{,}8 \cdot (40 + x) \Rightarrow x = 10$
Man muss 10 kg Zink beimengen.

6.93

Material	Volumen	davon Spiritus
60%-Spirit.	85	0,6·85
30%-Spirit.	x	0,3·x
Mischung	85 + x	0,5·(85+x)

$0{,}6\cdot 85 + 0{,}3\cdot x = 0{,}5\cdot(85 + x) \Rightarrow x = 42{,}5$
42,5 l des 30%-Spiritus.

6.94

Material	Volumen	davon < 20 mm
Sorte A	15	0,7·15
Sorte B	x	0,9·x
Sorte C	45 - x	0,5·(45-x)
Mischung	60	0,8·60

$0{,}7\cdot 15 + 0{,}9\cdot x + 0{,}5\cdot(45-x) = 0{,}8\cdot 60 \Rightarrow$
$x = 37{,}5\ m^3$ (Sorte B), Sorte C: $7{,}5\ m^3$

6.95

Material	Masse	davon Kupfer
Bronce	200-x	0,75·(200-x)
Kupfer	x	x
Mischung	200	0,8·200

$0{,}75\cdot(200-x) + x = 0{,}8\cdot 200 \Rightarrow x = 40$
40 kg reines Kupfer sind beizumengen.

6.96

Material	Volumen	davon < 3 mm
Sorte 1	4	0,8· 4
Sorte 2	2	0,6· 2
Sorte 3	1	1
Mischung	7	x·7

$0{,}8\cdot 4 + 0{,}6\cdot 2 + 1 = x\cdot 7 \Rightarrow x = 0{,}771\ldots$
$x\cdot 7 = 5{,}4\ m^3$ mit Korngröße unter 3 mm

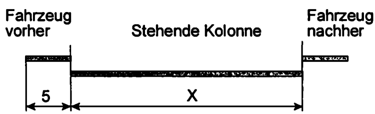
6.97 $c_{Wasser}\cdot 20\cdot(50 - \vartheta_m) = c_{Wasser}\cdot 30\cdot(\vartheta_m - 70) \Rightarrow \vartheta_m = 62°C$

6.98 $c_{Wasser}\cdot 30\cdot(\vartheta_1 - 60) = c_{Wasser}\cdot 20\cdot(60 - 80) \Rightarrow \vartheta_1 \approx 47$;ursprüngliche Temperatur im Fass: 47°C

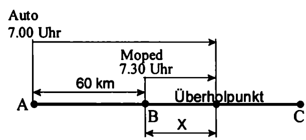
6.99 $465\cdot 0{,}5\cdot(120 - \vartheta_m) = 4187\cdot 1\cdot(\vartheta_m - 20) \Rightarrow \vartheta_m \approx 25°C$

6.100 x Geschwindigkeit des 1. Fahrzeuges, Streckenlänge = Geschwindigkeit mal Zeit = 3x
x-20 Geschwindigkeit des 2. Fahrzeuges; Streckenlänge = 4·(x - 20);
$3x = 4\cdot(x - 20) \Rightarrow x = 80$ km/h; Geschwindigkeit des 2. Fahrzeuges: 60 km/h

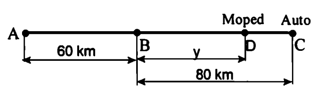
6.101 Geschwindigkeit v = 108 km/h = 30 m/s;
$30\cdot 15 = x + 5 \Rightarrow x = 445.$
Länge der Kolonne: 445 m



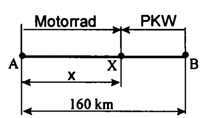
6.102 a) Fahrzeit des Mopeds bis zum Überholen: t;
Strecke $x = 50\cdot t$;
Fahrzeit des Autos bis zum Überholen:
$t + 0{,}5$; Fahrstrecke: $(t + 0{,}5)\cdot 100$;
$60 + 50\cdot t = (t + 0{,}5)\cdot 100 \Rightarrow t = 0{,}2$ h
$x = 50\cdot 0{,}2 = 10$ km.
Das Auto überholt das Moped 10 km nach B.



b) Fahrzeit des Autos bis C: $\frac{60+80}{100}$ h = 1,4 h;
das Moped hat bis dahin 1,4 h - 0,5 h = 0,9 h
Fahrzeit und erreicht den Punkt D.
$y = 50\cdot 0{,}9 = 45$ km. D liegt daher 35 km
vor C.

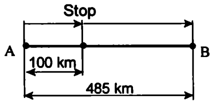


6.103 a) x Entfernung von A, wo sich die beiden Fahrzeuge
treffen; Fahrzeit des Motorrades in h: $\frac{90}{x}$;
Fahrzeit des Autos: $\frac{70}{160-x}$; beide Zeiten sind gleich::
$\frac{90}{x} = \frac{70}{160-x} \Rightarrow x = 90$; Treffpunkt: 90 km von A.

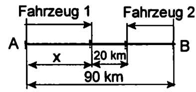


b) x = 100 km; v Geschwindigkeit des PKW; $\frac{90}{100} = \frac{v}{160-100} \Rightarrow v = 54$ km/h

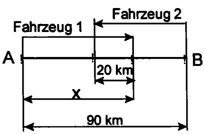
6.104 Fahrzeit ohne Tankstop: $\frac{9}{2}$ h; Pause: $\frac{1}{6}$ h; Fahrzeit bis zum Tankstop: $\frac{100}{120}\,\text{h} = \frac{5}{6}\,\text{h}$; Fahrzeit danach: $\frac{9}{2} - \frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{7}{2}\,\text{h}$;
v Geschwindigkeit für die restliche Strecke der Länge 385 km;
$\frac{385}{v} = \frac{7}{2} \Rightarrow v = 110$ km/h.



6.105 *Vor der Begegnung:* Fahrzeit des Fahrzeuges 1: $\frac{x}{60}$;
Fahrzeit des Fahrzeuges 2: $\frac{90-(x+20)}{80}$;
gleiche Fahrzeiten: $\frac{x}{60} = \frac{90-(x+20)}{80} \Rightarrow x = 30$ km;
$\frac{x}{60} = \frac{30}{60} = 0{,}5$ h; nach 30 Minuten beträgt ihr Abstand 20 km.



Nach der Begegnung: Fahrzeit des Fahrzeuges 1: $\frac{x}{60}$;
Fahrzeit des Fahrzeuges 2: $\frac{90-(x-20)}{80}$;
gleiche Fahrzeiten: $\frac{x}{60} = \frac{90-(x-20)}{80} \Rightarrow x = \frac{330}{7}\,\text{km} \approx 47{,}1$ km;
$\frac{x}{60} = \frac{330/7}{60} = \frac{11}{14}\,\text{h} \approx 47$ Minuten; nach etwa 47 Minuten beträgt ihr Abstand wieder 20 km.



6.106 Tankinhalt (in Liter): V; $\frac{V}{25}$ Zufluss pro Minute, $\frac{V}{24}$ Abfluss pro Minute;

a) $V - 6\cdot\frac{V}{24} = 6000 \Rightarrow V = 8000$ Liter

b) Zufluss pro Minute: $\frac{V}{25} = \frac{8000}{25} = 320$ Liter $= 0{,}320\ \text{m}^3$;

Abfluss pro Minute: $\frac{V}{24} = \frac{8000}{24} \approx 333$ Liter $= 0{,}333\ \text{m}^3$

6.107 Meister braucht allein 20 Tage, pro Tag schafft er $\frac{1}{20}$; Geselle braucht allein t Tage, pro Tag schafft er $\frac{1}{t}$; zusammen brauchen beide 12 Tage: $\frac{1}{20}\cdot 12 + \frac{1}{t}\cdot 12 = 1 \Rightarrow t = 30$ Tage

6.108 1. Kunde erhält (in Liter) x, der 2. Kunde 2x. der 3. Kunde $\frac{x}{3}$:

$1000 - (x + 2x + \frac{x}{3}) = 100 \Rightarrow x = 270$; 1. Kunde: 270 l, 2. Kunde: 540 l, 3. Kunde: 90 l

6.109 V Füllvolumen des Behälters, 1. Zufluss füllt pro Stunde $\frac{V}{4}$, 2. Zufluss füllt pro Stunde $\frac{V}{6}$;

a) t Fülldauer, wenn beide Zuflüsse gleichzeitig in Betrieb: $\frac{V}{4}\cdot t + \frac{V}{6}\cdot t = V$ oder gekürzt durch V: $\frac{1}{4}\cdot t + \frac{1}{6}\cdot t = 1 \Rightarrow t = 2{,}4$ h. Fülldauer 2,4 Stunden = 2 h 24 min

b) t Zuflussdauer des 1. Zuflusses, t+1 jene des 2. Zuflusses:
$\frac{V}{4}\cdot t + \frac{V}{6}\cdot(t+1) = V \Rightarrow t = 2$ h; 1. Zufluss: 2 Stunden, 2. Zufluss: 3 Stunden

c) Abfluss leert pro Stunde $\frac{V}{3}$: t Zeit bis zur halben Füllung: $\frac{V}{4}\cdot t + \frac{V}{6}\cdot t - \frac{V}{3}\cdot t = \frac{V}{2} \Rightarrow t = 6$ h
Behälter ist in 6 Stunden halb gefüllt.

d) Zusätzliches Abflussrohr leert allein in t Stunden: $\frac{V}{4} + \frac{V}{6} = \frac{V}{3} + \frac{V}{t} \Rightarrow t = 12$ h

6.110 a) t benötigte Zeit, wenn alle drei Bagger gleichzeitig eingesetzt werden:

$\frac{1}{12}\cdot t+\frac{1}{15}\cdot t+\frac{1}{10}\cdot t=1 \;\Rightarrow\; t=4$; die Arbeit dauert 4 Tage

b) $\frac{1}{12}\cdot t+\frac{1}{15}\cdot t+\frac{1}{10}\cdot (t-5)=1 \;\Rightarrow\; t=6$; die Arbeit dauert 6 Tage

6.111 t benötigte Zeit, wenn alle drei Anstreicher gleichzeitig arbeiten:

$\frac{1}{7{,}5}\cdot t+\frac{1}{6}\cdot t+\frac{1}{5}\cdot t=1 \;\Rightarrow\; t=2$; die Arbeit dauert 2 Tage

6.112 t Zeit, welche die 2. Röhre allein zum füllen braucht; 1. Röhre füllt 6 Stunden.

$\frac{1}{9}\cdot 6+\frac{1}{t}\cdot 2=1 \;\Rightarrow\; t=6$; die 2.Röhre allein füllt den Behälter in 6 Stunden

6.113 x Menge, die der 2. Bagger schafft; $x+1000+x+3x=33000 \;\Rightarrow\; x=6400$;
der 1. Bagger schafft 7400 m^3, der 2. Bagger 6400 m^3, der 3. Bagger 19200 m^3

6.114 t Zeit in Minuten, in der die Pumpe B in Betrieb ist;
$(t-20)\cdot 80+100\cdot t+(t+20)\cdot 150=21200 \;\Rightarrow\; t=60$; die Pumpe B ist 1 Stunde in Betrieb; der gesamte Pumpvorgang dauert 60 + 20 = 80 Minuten.

6.115 a)
$$v_n=\frac{m_1\cdot v_1+m_2\cdot v_2}{m_1+m_2}$$
$$m_1\cdot v_n+m_2\cdot v_n=m_1\cdot v_1+m_2\cdot v_2$$
$$m_2\cdot(v_n-v_2)=m_1\cdot(v_1-v_n)$$
$$m_2=\frac{m_1\cdot(v_1-v_n)}{v_{n1}-v_2}$$

b)
$$v_n=\frac{m_1\cdot v_1+m_2\cdot v_2}{m_1+m_2}$$
$$v_n\cdot m_1+v_n\cdot m_2=m_1\cdot v_1+m_2\cdot v_2$$
$$v_n\cdot m_1+v_n\cdot m_2-m_1\cdot v_1=m_2\cdot v_2$$
$$v_2=\frac{m_1\cdot(v_n-v_1)+v_n\cdot m_2}{m_2}$$

6.116 a)
$$v_n=v_1\cdot\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}+v_2\cdot\frac{2m_2}{m_1+m_2}$$
$$v_n=\frac{v_1\cdot(m_1-m_2)+v_2\cdot 2m_2}{m_1+m_2}$$
$$m_1\cdot v_n+m_2\cdot v_n=m_1\cdot v_1-m_2\cdot v_1+2m_2\cdot v_2$$
$$m_1\cdot(v_n-v_1)=m_2\cdot(2v_2-v_1-v_n)$$
$$m_1=\frac{m_2\cdot(2v_2-v_1-v_n)}{v_n-v_1}$$

b)
$$v_n=v_1\cdot\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}+v_2\cdot\frac{2m_2}{m_1+m_2}$$
$$v_n=\frac{v_1\cdot(m_1-m_2)+v_2\cdot 2m_2}{m_1+m_2}$$
$$m_1\cdot v_n+m_2\cdot v_n=m_1\cdot v_1-m_2\cdot v_1+2m_2\cdot v_2$$
$$m_1\cdot v_n+m_2\cdot v_n-m_1\cdot v_1+m_2\cdot v_1=2m_2\cdot v_2$$
$$v_2=\frac{m_1\cdot v_n+m_2\cdot v_n-m_1\cdot v_1+m_2\cdot v_1}{2m_2}$$

6.117 a)
$$t_m=\frac{c_1\cdot m_1\cdot t_1+c_2\cdot m_2\cdot t_2}{c_1\cdot m_1+c_2\cdot m_2}$$
$$c_1\cdot m_1\cdot t_m+c_2\cdot m_2\cdot t_m=c_1\cdot m_1\cdot t_1+c_2\cdot m_2\cdot t_2$$
$$c_1\cdot m_1\cdot t_m+c_2\cdot m_2\cdot t_m-c_1\cdot m_1\cdot t_1=c_2\cdot m_2\cdot t_2$$
$$t_2=\frac{c_1\cdot m_1\cdot t_m+c_2\cdot m_2\cdot t_m-c_1\cdot m_1\cdot t_1}{c_2\cdot m_2}$$

b)
$$t_m=\frac{c_1\cdot m_1\cdot t_1+c_2\cdot m_2\cdot t_2}{c_1\cdot m_1+c_2\cdot m_2}$$
$$c_1\cdot m_1\cdot t_m+c_2\cdot m_2\cdot t_m=c_1\cdot m_1\cdot t_1+c_2\cdot m_2\cdot t_2$$
$$m_1\cdot(c_1\cdot t_m-c_1\cdot t_1)=c_2\cdot m_2\cdot t_2-c_2\cdot m_2\cdot t_m$$
$$m_1=\frac{m_2\cdot(c_2\cdot t_2-c_2\cdot t_m)}{c_1\cdot(t_m-t_1)}$$

6.118 a)
$$p_1+\rho\cdot g\cdot h_1+\frac{\rho\cdot v_1^2}{2}=p_2+\rho\cdot g\cdot h_2+\frac{\rho\cdot v_2^2}{2}$$
$$2p_1+2\rho\cdot g\cdot h_1+\rho\cdot v_1^2=2p_2+2\rho\cdot g\cdot h_2+\rho\cdot v_2^2$$
$$2p_1+2g\cdot\rho\cdot h_1+\rho\cdot v_1^2-2p_2-\rho\cdot v_2^2=2g\cdot\rho\cdot h_2$$
$$h_2=\frac{(2g\cdot h_1+v_1^2-v_2^2)\cdot\rho+2\cdot(p_1-p_2)}{2g\cdot\rho}$$

b)
$$p_1+\rho\cdot g\cdot h_1+\frac{\rho\cdot v_1^2}{2}=p_2+\rho\cdot g\cdot h_2+\frac{\rho\cdot v_2^2}{2}$$
$$2p_1+2\rho\cdot g\cdot h_1+\rho\cdot v_1^2=2p_2+2\rho\cdot g\cdot h_2+\rho\cdot v_2^2$$
$$2p_1=2p_2+2\rho\cdot g\cdot h_2+\rho\cdot v_2^2-2\rho\cdot g\cdot h_1-\rho\cdot v_1^2$$
$$p_1=\frac{2p_2+2g\cdot\rho\cdot(h_2-h_1)-\rho\cdot v_1^2+\rho\cdot v_2^2}{2}$$

6.119 $F_1=\frac{F_2}{2}\cdot\left(1-\frac{r}{R}\right)$

$F_1=\frac{F_2}{2}\cdot\frac{R-r}{R}$

$2F_1\cdot R=F_2\cdot R-F_2\cdot r$

$F_2\cdot r=F_2\cdot R-2F_1\cdot R$

a) $r=\frac{R\cdot(F_2-2F_1)}{F_2}$

b) $R=\frac{r\cdot F_2}{F_2-2F_1}$

6.120 $f'=f\cdot\left(1-\frac{G\cdot M}{c^2\cdot R}\right)$

$f'=f\cdot\frac{c^2\cdot R-G\cdot M}{c^2\cdot R}$

$f'\cdot c^2\cdot R=f\cdot c^2\cdot R-f\cdot G\cdot M$

$f\cdot G\cdot M=f\cdot c^2\cdot R-f'\cdot c^2\cdot R$

a) $R=\frac{f\cdot G\cdot M}{c^2\cdot(f-f')}$

b) $G=\frac{c^2\cdot R\cdot(f-f')}{f\cdot M}$

6.121 $T_A=T_B\cdot\left(1-\frac{g\cdot H}{c^2}\right)$

$T_A=T_B\cdot\frac{c^2-g\cdot H}{c^2}$

$T_A\cdot c^2=T_B\cdot c^2-T_B\cdot g\cdot H$

$T_B\cdot g\cdot H=T_B\cdot c^2-T_A\cdot c^2$

a) $g=\frac{c^2\cdot(T_B-T_A)}{H\cdot T_B}$

b) $H=\frac{c^2\cdot(T_B-T_A)}{g\cdot T_B}$

6.122 $\frac{T^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{G\cdot(M_A+M_B)}$

$T^2\cdot G\cdot(M_A+M_B)=4\pi^2\cdot a^3$

a) $G=\frac{4\pi^2\cdot a^3}{(M_A+M_B)\cdot T^2}$

$T^2\cdot G\cdot M_A+T^2\cdot G\cdot M_B=4\pi^2\cdot a^3$

$T^2\cdot G\cdot M_B=4\pi^2\cdot a^3-T^2\cdot G\cdot M_A$

b) $M_B=\frac{4\pi^2\cdot a^3-T^2\cdot G\cdot M_A}{G\cdot T^2}$

$=\frac{4\pi^2\cdot a^3}{G\cdot T^2}-M_A$

6.123 $f_B=f_Q\cdot\left(1-\frac{v_Q}{c}\right)$

$f_B=f_Q\cdot\frac{c-v_Q}{c}$

$f_B\cdot c=f_Q\cdot c-f_Q\cdot v_Q$

$f_Q\cdot v_Q=f_Q\cdot c-f_B\cdot c$

a) $v_Q=\frac{c\cdot(f_0-f_B)}{f_0}=c\cdot\left(1-\frac{f_B}{f_Q}\right)$

b) $c=\frac{f_Q\cdot v_Q}{f_Q-f_B}$

6.124 $\omega'=\frac{I_1}{I_1+I_2}\cdot\omega$

$I_1\cdot\omega'+I_2\cdot\omega'=I_1\cdot\omega$

$I_2\cdot\omega'=I_1\cdot\omega-I_1\cdot\omega'$

$I_2\cdot\omega'=I_1\cdot(\omega-\omega')$

a) $I_1=\frac{I_2\cdot\omega'}{\omega-\omega'}$

b) $I_2=\frac{I_1\cdot(\omega-\omega')}{\omega'}$

6.125 $v'=\frac{m_1\cdot v_1}{m_1+m_2}$

$m_1\cdot v'+m_2\cdot v'=m_1\cdot v_1$

$m_1\cdot(v_1-v')=m_2\cdot v'$

a) $m_1=\frac{m_2\cdot v'}{v_1-v'}$

b) $m_2=\frac{m_1\cdot(v_1-v')}{v'}=$

$=\frac{m_1\cdot v_1}{v'}-m_1$

6.126 $F=G\cdot\frac{R-r}{2\cdot R}$

$2R\cdot F=G\cdot R-G\cdot r$

$R\cdot(G-2F)=G\cdot r$

a) $R=\frac{G\cdot r}{G-2F}$

b) $r=\frac{R\cdot(G-2F)}{G}=$

$=R-\frac{2F\cdot R}{G}$

6.127 $s=\frac{c_w\cdot c_l}{c_w-c_l}\cdot\Delta t$

$c_w\cdot s-c_l\cdot s=c_w\cdot c_l\cdot\Delta t$

$c_w\cdot(s-c_l\cdot\Delta t)=c_l\cdot s$

a) $c_w=\frac{c_l\cdot s}{s-c_l\cdot\Delta t}$

$c_w\cdot s=c_l\cdot(s+c_w\cdot\Delta t)$

b) $c_l=\frac{c_w\cdot s}{s+c_w\cdot\Delta t}$

6.128 $r_s=\frac{M\cdot R+m\cdot r}{M+m}$

$M\cdot r_s+m\cdot r_s=M\cdot R+m\cdot r$

$M\cdot(r_s-R)=m\cdot(r-r_s)$

a) $M=\frac{m\cdot(r-r_s)}{r_s-R}=$

$=\frac{m\cdot(r_s-r)}{R-r_s}$

$m\cdot(r_s-r)=M\cdot(R-r_s)$

b) $m=\frac{M\cdot(R-r_s)}{r_s-r}$

6.129 $\frac{1}{s}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f_A}+\frac{1}{f_B}$

$\frac{b+s}{b\cdot s}=\frac{f_B+f_A}{f_A\cdot f_B}$

$b\cdot f_A\cdot f_B+s\cdot f_A\cdot f_B=b\cdot s\cdot f_B+b\cdot s\cdot f_A$

$b\cdot f_A\cdot f_B+s\cdot f_A\cdot f_B-b\cdot s\cdot f_A=b\cdot s\cdot f_B$

a) $f_A=\frac{b\cdot s\cdot f_B}{b\cdot f_B+s\cdot f_B-b\cdot s}$

$s\cdot f_A\cdot f_B=b\cdot s\cdot f_B+b\cdot s\cdot f_A-b\cdot f_A\cdot f_B$

b) $b=\frac{f_A\cdot f_B\cdot s}{f_B\cdot s+f_A\cdot s-f_A\cdot f_B}$

6.130 $W=G\cdot M\cdot m\cdot\left(\frac{1}{r_P}-\frac{1}{r_A}\right)$

$W=G\cdot M\cdot m\cdot\frac{r_A-r_P}{r_A\cdot r_P}$

$r_A\cdot r_P\cdot W=G\cdot M\cdot m\cdot r_A-G\cdot M\cdot m\cdot r_P$

$G\cdot M\cdot m\cdot r_P=G\cdot M\cdot m\cdot r_A-r_A\cdot r_P\cdot W$

a) $r_A=\frac{G\cdot M\cdot m\cdot r_P}{G\cdot M\cdot m-r_P\cdot W}$

$r_A\cdot r_P\cdot W+G\cdot M\cdot m\cdot r_P=G\cdot M\cdot m\cdot r_A$

b) $r_P=\frac{G\cdot M\cdot m\cdot r_A}{r_A\cdot W+G\cdot M\cdot m}$

6.131 $\frac{Q_1+Q_2}{Q_1}=\frac{T_1-T_2}{T_1}$

$Q_1\cdot T_1+Q_2\cdot T_1=Q_1\cdot T_1-Q_1\cdot T_2$

$Q_2\cdot T_1=-Q_1\cdot T_2$

a) $T_1=-\frac{Q_1\cdot T_2}{Q_2}$

b) $Q_2=-\frac{Q_1\cdot T_2}{T_1}$

6.132 $\left(p+\frac{a}{V^2}\right)\cdot(V-b)=R\cdot T$

$p+\frac{a}{V^2}=\frac{R\cdot T}{V-b}$

$\frac{a}{V^2}=\frac{R\cdot T}{V-b}-p$

a) $a=\frac{R\cdot T\cdot V^2}{V-b}-p\cdot V^2$

b) $p=\frac{R\cdot T}{V-b}-\frac{a}{V^2}$

6.133 $R=\frac{m_1\cdot R_1+m_2\cdot R_2}{m_1+m_2}$

$(m_1+m_2)\cdot R=m_1\cdot R_1+m_2\cdot R_2$

a) $R_2=\frac{(m_1+m_2)\cdot R-m_1\cdot R_1}{m_2}$

$m_1\cdot R+m_2\cdot R=m_1\cdot R_1+m_2\cdot R_2$

$m_1\cdot(R-R_1)=m_2\cdot(R_2-R)$

b) $m_1=\frac{m_2\cdot(R_2-R)}{R-R_1}$

6.134 $c=\frac{Q}{m\cdot(T_2-T_1)}$

$c\cdot m\cdot T_2-c\cdot m\cdot T_1=Q$

$c\cdot m\cdot T_2-Q=c\cdot m\cdot T_1$

a) $T_1=\frac{c\cdot m\cdot T_2-Q}{c\cdot m}=T_2-\frac{Q}{c\cdot m}$

b) $T_2=T_1+\frac{Q}{c\cdot m}$

6.135 $m_2=\frac{c_1\cdot m_1\cdot(T_1-T_m)}{c_2\cdot(T_m-T_2)}$

$c_2\cdot m_2\cdot T_m-c_2\cdot m_2\cdot T_2=c_1\cdot m_1\cdot T_1-c_1\cdot m_1\cdot T_m$

a) $T_1=\frac{c_2\cdot m_2\cdot T_m-c_2\cdot m_2\cdot T_2+c_1\cdot m_1\cdot T_m}{c_1\cdot m_1}$

$T_m\cdot(c_2\cdot m_2+c_1\cdot m_1)=c_1\cdot m_1\cdot T_1+c_2\cdot m_2\cdot T_2$

b) $T_m=\frac{c_1\cdot m_1\cdot T_1+c_2\cdot m_2\cdot T_2}{c_1\cdot m_1+c_2\cdot m_2}$

6.136 a) $\frac{1}{k}=\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{L}{\lambda}$

$\frac{L}{\lambda}=\frac{1}{k}-\frac{1}{\alpha_1}-\frac{1}{\alpha_2}$

$\frac{L}{\lambda}=\frac{\alpha_1\cdot\alpha_2-k\cdot(\alpha_1+\alpha_2)}{k\cdot\alpha_1\cdot\alpha_2}$

$\lambda=\frac{k\cdot L\cdot\alpha_1\cdot\alpha_2}{\alpha_1\cdot\alpha_2-k\cdot(\alpha_1+\alpha_2)}$

b) $\frac{1}{k}=\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\frac{L}{\lambda}$

$\frac{1}{\alpha_1}=\frac{1}{k}-\frac{1}{\alpha_2}-\frac{L}{\lambda}$

$\frac{1}{\alpha_1}=\frac{\lambda\cdot\alpha_2-k\cdot(\lambda+L\cdot\alpha_2)}{k\cdot\lambda\cdot\alpha_2}$

$\alpha_1=\frac{k\cdot\lambda\cdot\alpha_2}{\lambda\cdot\alpha_2-k\cdot(\lambda+L\cdot\alpha_2)}$

6.137 $E=\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2-\frac{Z\cdot e^2}{4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot r}$

$4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot r\cdot E=2\pi\cdot\varepsilon_0\cdot r-Z\cdot e^2$

$Z\cdot e^2=2\pi\cdot\varepsilon_0\cdot r\cdot m\cdot v^2-4\pi\cdot\varepsilon_0\cdot r\cdot E$

a) $r=\frac{Z\cdot e^2}{2\pi\cdot\varepsilon_0\cdot(m\cdot v^2-2E)}$

b) $Z=\frac{2\pi\cdot\varepsilon_0\cdot r\cdot(m\cdot v^2-2E)}{e^2}$

6.138 $\frac{1}{\lambda^2}=\frac{2m}{h^2}\cdot\left[E+\frac{Z\cdot e^2}{k\cdot r}\right]$

$\frac{1}{\lambda^2}=\frac{2m}{h^2}\cdot\frac{E\cdot k\cdot r+Z\cdot e^2}{k\cdot r}$

$h^2\cdot k\cdot r=2m\cdot\lambda^2\cdot E\cdot k\cdot r+2m\cdot\lambda^2\cdot Z\cdot e^2$

$h^2\cdot k\cdot r-2m\cdot\lambda^2\cdot Z\cdot e^2=2m\cdot\lambda^2\cdot E\cdot k\cdot r$

a) $E=\frac{h^2\cdot k\cdot r-2Ze^2\cdot m\cdot\lambda^2}{2m\cdot\lambda^2\cdot k\cdot r}$

$h^2\cdot k\cdot r=2m\cdot\lambda^2\cdot E\cdot k\cdot r+2Ze^2\cdot\lambda^2$

b) $m=\frac{h^2\cdot k\cdot r}{2\lambda^2\cdot(E\cdot k\cdot r+Z\cdot e^2)}$

6.139 $f=f_Q\cdot\frac{1+\frac{v_B}{c}}{1-\frac{v_B}{c}}$

$f=f_Q\cdot\frac{c+v_B}{c-v_B}$

$f\cdot c-f\cdot v_B=c\cdot f_Q+v_B\cdot f_Q$

$c\cdot(f-f_Q)=v_B\cdot(f+f_Q)$

a) $v_B=\frac{c\cdot(f-f_Q)}{f+f_Q}$

b) $f_Q=\frac{f\cdot(c-v_B)}{c+v_B}$

6.140 $E=\frac{1}{2}\cdot\frac{I_1\cdot I_2}{I_1+I_2}\cdot\omega_1^2$

$2E\cdot I_1+2E\cdot I_2=I_1\cdot I_2\cdot\omega_1^2$

$I_1\cdot(I_2\cdot\omega_1^2-2E)=2E\cdot I_2$

a) $I_1=\frac{2I_2\cdot E}{I_2\cdot\omega_1^2-2E}$

$I_2\cdot(I_1\cdot\omega_1^2-2E)=2I_1\cdot E$

b) $I_2=\frac{2I_1\cdot E}{I_1\cdot\omega_1^2-2E}$

6.141 $v_x=\frac{v'_x+v}{1+\frac{v'_x\cdot v}{c^2}}$

$v_x=\frac{c^2\cdot(v'_x+v)}{c^2+v'_x\cdot v}$

a) $c^2\cdot v_x+v_x\cdot v'_x\cdot v=c^2\cdot v'_x+c^2\cdot v$

$v'_x\cdot(v_x\cdot v-c^2)=c^2\cdot(v-v_x)$

$v'_x=\frac{c^2\cdot(v-v_x)}{v_x\cdot v-c^2}$

b) $c^2\cdot v_x+v_x\cdot v'_x\cdot v=c^2\cdot v'_x+c^2\cdot v$

$v\cdot(v_x\cdot v'_x-c^2)=c^2\cdot(v'_x-v_x)$

$v=\frac{c^2\cdot(v'_x-v_x)}{v_x\cdot v'_x-c^2}$

6.142 a) $\frac{1}{R_G}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}$

$$\frac{1}{R_G}=\frac{R_2\cdot R_3+R_1\cdot R_3+R_1\cdot R_2}{R_1\cdot R_2\cdot R_3}$$

$$R_G=\frac{R_1\cdot R_2\cdot R_3}{R_2\cdot R_3+R_1\cdot R_3+R_1\cdot R_2}$$

b) $\frac{1}{R_2}=\frac{1}{R_G}-\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_3}$

$$\frac{1}{R_2}=\frac{R_1\cdot R_3-R_3\cdot R_G-R_1\cdot R_G}{R_1\cdot R_3\cdot R_G}$$

$$R_2=\frac{R_1\cdot R_3\cdot R_G}{R_1\cdot R_3-R_3\cdot R_G-R_1\cdot R_G}$$

6.143 $\frac{U_1}{U_2}=R_1\cdot\left(\frac{1}{R_a}-\frac{1}{R_2}\right)$

$$\frac{U_1}{U_2}=R_1\cdot\frac{R_2-R_a}{R_2\cdot R_a}$$

$$U_1\cdot R_2\cdot R_a=U_2\cdot R_1\cdot R_2-U_2\cdot R_1\cdot R_a$$

$$U_1\cdot R_2\cdot R_a+U_2\cdot R_1\cdot R_a=U_2\cdot R_1\cdot R_2$$

a) $R_a=\frac{U_2\cdot R_1\cdot R_2}{U_1\cdot R_2+U_2\cdot R_1}$

$$U_2\cdot R_1\cdot R_a=U_2\cdot R_1\cdot R_2-U_1\cdot R_2\cdot R_a$$

b) $R_2=\frac{R_1\cdot R_a\cdot U_2}{R_a\cdot U_1-R_1\cdot U_2}$

6.144 $R=\frac{U}{I-\frac{U}{R_v}}$

$$R=\frac{R_v\cdot U}{R_v\cdot I-U}$$

$$R\cdot R_v\cdot I-R\cdot U=R_v\cdot U$$

$$R\cdot R_v\cdot I=R\cdot U+R_v\cdot U$$

a) $I=\frac{U\cdot(R+R_v)}{R\cdot R_v}$

$$R\cdot R_v\cdot I-R_v\cdot U=R\cdot U$$

b) $R_v=\frac{R\cdot U}{R\cdot I-U}$

6.145 $\eta_B=(1-v)\cdot\frac{\beta}{1-\varepsilon\cdot(1-\beta)}$

$$\eta_B-\eta_B\cdot\varepsilon\cdot(1-\beta)=(1-v)\cdot\beta$$

$$\eta_B-\eta_B\cdot\varepsilon+\eta_B\cdot\varepsilon\cdot\beta=\beta-v\cdot\beta$$

$$\beta\cdot(\eta_B\cdot\varepsilon+v-1)=\eta_B\cdot(\varepsilon-1)$$

a) $\beta=\frac{\eta_B\cdot(\varepsilon-1)}{\eta_B\cdot\varepsilon+v-1}$

$$v\cdot\beta=\beta\cdot(1-\eta_B\cdot\varepsilon)+\eta_B\cdot(\varepsilon-1)$$

b) $v=\frac{\beta\cdot(1-\eta_B\cdot\varepsilon)+\eta_B\cdot(\varepsilon-1)}{\beta}$

6.146 $M_D=\frac{H}{\cos\alpha}\cdot\left(\mu\cdot\frac{r_1}{R_1}\cdot R+f\cdot\frac{R_1+R}{R_1}\right)$

$$M_D=\frac{H}{\cos\alpha}\cdot\frac{\mu\cdot r_1\cdot R+f\cdot R_1+f\cdot R}{R_1}$$

$$R_1\cdot M_D\cdot\cos\alpha=\mu\cdot r_1\cdot R\cdot H+f\cdot R_1\cdot H+f\cdot R\cdot H$$

$$R_1\cdot(M_D\cdot\cos\alpha-f\cdot H)=(\mu\cdot r_1+f)\cdot H\cdot R$$

a) $R_1=\frac{(\mu\cdot r_1+f)\cdot H\cdot R}{M_D\cdot\cos\alpha-f\cdot H}$

$$f\cdot(R_1+R)\cdot H=R_1\cdot M_D\cdot\cos\alpha-\mu\cdot r_1\cdot R\cdot H$$

b) $f=\frac{R_1\cdot M_D\cdot\cos\alpha-\mu\cdot r_1\cdot R\cdot H}{(R_1+R)\cdot H}$

6.147 $\kappa_P=\frac{1{,}6\cdot V_s\cdot V_h}{\frac{T_s}{T_u}}$

$$\kappa_P=\frac{1{,}6\cdot V_s\cdot V_h\cdot T_u}{T_s}$$

$$\kappa_P\cdot T_S=1{,}6\cdot V_s\cdot V_h\cdot T_u$$

a) $T_u=\frac{\kappa_P\cdot T_s}{1{,}6\cdot V_s\cdot V_h}=$

$$=\frac{0{,}625\,\kappa_P\cdot T_s}{V_s\cdot V_h}$$

b) $T_s=\frac{1{,}6\cdot V_s\cdot V_h\cdot T_u}{\kappa_P}$

6.148 $W_{12}=\frac{1}{\kappa-1}\cdot(p_2\cdot V_2-p_1\cdot V_1)$

$$\kappa-1=\frac{p_2\cdot V_2-p_1\cdot V_1}{W_{12}}$$

a) $\kappa=\frac{p_2\cdot V_2-p_1\cdot V_1}{W_{12}}+1$

$$W_{12}\cdot(\kappa-1)=p_2\cdot V_2-p_1\cdot V_1$$

$$p_1\cdot V_1=p_2\cdot V_2-(\kappa-1)\cdot W_{12}$$

b) $p_1=\frac{p_2\cdot V_2-(\kappa-1)\cdot W_{12}}{V_1}$

6.149 $W_{12}=\frac{m\cdot R\cdot T_1}{\kappa-1}\cdot\left[\frac{T_2}{T_1}-1\right]$

$$W_{12}=\frac{m\cdot R}{\kappa-1}\cdot(T_2-T_1)$$

$$W_{12}\cdot(\kappa-1)=m\cdot R\cdot(T_2-T_1)$$

$$\frac{W_{12}\cdot(\kappa-1)}{m\cdot R}=T_2-T_1$$

a) $T_2=\frac{(\kappa-1)\cdot W_{12}}{m\cdot R}+T_1$

b) $T_1=\frac{(1-\kappa)\cdot W_{12}}{m\cdot R}+T_2$

6.150 $\eta=1-\frac{1}{\kappa}\cdot\frac{T_1}{T_2}\cdot\frac{\frac{T_4}{T_1}-1}{\frac{T_3}{T_2}-1}$

$$\frac{1}{\kappa}\cdot\frac{T_1}{T_2}\cdot\frac{\frac{T_4-T_1}{T_1}}{\frac{T_3-T_2}{T_2}}=1-\eta$$

$$\frac{T_4-T_1}{T_3-T_2}=\kappa\cdot(1-\eta)$$

$$T_4-T_1=\kappa\cdot(1-\eta)\cdot(T_3-T_2)$$

a) $T_1=T_4-\kappa\cdot(1-\eta)\cdot(T_3-T_2)$

$$\frac{T_4-T_1}{\kappa\cdot(1-\eta)}=T_3-T_2$$

b) $T_2=T_3-\frac{T_4-T_1}{\kappa\cdot(1-\eta)}$

6.151 $Q=c_v\cdot\frac{\kappa-n}{1-n}\cdot m\cdot(T_2-T_1)$

$$\frac{Q\cdot(1-n)}{c_v\cdot(\kappa-n)\cdot m}=T_2-T_1$$

a) $T_1=\frac{Q\cdot(n-1)}{c_v\cdot(\kappa-n)\cdot m}+T_2$

$$Q\cdot(1-n)=c_v\cdot(\kappa-n)\cdot m\cdot(T_2-T_1)$$

$$Q-Q\cdot n=$$

$$=c_v\cdot\kappa\cdot m\cdot(T_2-T_1)-c_v\cdot n\cdot m\cdot(T_2-T_1)$$

$$n\cdot[c_v\cdot m\cdot(T_2-T_1)-Q]=$$

$$=c_v\cdot\kappa\cdot m\cdot(T_2-T_1)-Q$$

b) $n=\frac{c_v\cdot\kappa\cdot m\cdot(T_2-T_1)-Q}{c_v\cdot m\cdot(T_2-T_1)-Q}=$

$$=\frac{c_v\cdot\kappa\cdot m\cdot(T_1-T_2)+Q}{c_v\cdot m\cdot(T_1-T_2)+Q}$$

6.152 $\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}$

a) $\frac{1}{C}=\frac{C_2\cdot C_3+C_1\cdot C_3+C_1\cdot C_2}{C_1\cdot C_2\cdot C_3}$

$C=\frac{C_1\cdot C_2\cdot C_3}{C_2\cdot C_3+C_1\cdot C_3+C_1\cdot C_2}$

b) $\frac{1}{C_1}=\frac{1}{C}-\frac{1}{C_2}-\frac{1}{C_3}$

$\frac{1}{C_1}=\frac{C_2\cdot C_3-C\cdot C_3-C\cdot C_2}{C\cdot C_2\cdot C_3}$

$C_1=\frac{C\cdot C_2\cdot C_3}{C_2\cdot C_3-C\cdot C_3-C\cdot C_2}$

6.153 $R_\vartheta=R_{\vartheta 1}\cdot\frac{\vartheta_0+\vartheta}{\vartheta_0+\vartheta_1}$

$\vartheta_0\cdot R_\vartheta+\vartheta_1\cdot R_\vartheta=\vartheta_0\cdot R_{\vartheta 1}+\vartheta\cdot R_{\vartheta 1}$

$\vartheta_0\cdot(R_\vartheta-R_{\vartheta 1})=\vartheta\cdot R_{\vartheta 1}-\vartheta_1\cdot R_\vartheta$

a) $\vartheta_0=\frac{\vartheta\cdot R_{\vartheta 1}-\vartheta_1\cdot R_\vartheta}{R_\vartheta-R_{\vartheta 1}}$

$\vartheta_1\cdot R_\vartheta=\vartheta_0\cdot(R_{\vartheta 1}-R_\vartheta)+\vartheta\cdot R_{\vartheta 1}$

b) $\vartheta_1=\frac{\vartheta_0\cdot(R_{\vartheta 1}-R_\vartheta)+\vartheta\cdot R_{\vartheta 1}}{R_\vartheta}$

6.154 $I=\frac{U\cdot R_1}{R\cdot(R_1+R_a)-R_1^2}$

$I\cdot R\cdot R_1+I\cdot R\cdot R_a-I\cdot R_1^2=U\cdot R_1$

$I\cdot R\cdot R_a=R_1\cdot(U-I\cdot R+I\cdot R_1)$

a) $R_a=\frac{R_1\cdot(U-I\cdot R+I\cdot R_1)}{I\cdot R}$

$R\cdot(I\cdot R_1+I\cdot R_a)=U\cdot R_1+I\cdot R_1^2$

b) $R=\frac{R_1\cdot(U+I\cdot R_1)}{I\cdot(R_1+R_a)}$

6.155 a) $x=\frac{32}{5}$ b) $x\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{3}\Rightarrow x=10$

c) $\frac{x}{2a}\cdot 2=b\cdot\frac{1}{a}\Rightarrow x=b$

6.156 a) $x\cdot\frac{1}{b}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a\cdot b}\Rightarrow x=\frac{1}{a^2}$ b) $\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{t}=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a}\Rightarrow x=\frac{a^2}{t}$ c) $\frac{x}{2}\cdot\frac{3a}{5}=\frac{3}{4}\cdot\frac{a}{0{,}5}\Rightarrow x=5$

6.157 a) $\frac{x}{u-v}\cdot u=\frac{u}{u+v}\cdot(u+v)^2\Rightarrow x=u^2-v^2$ b) $x\cdot\frac{n-m}{m\cdot n}=\frac{n+m}{m\cdot n}\cdot\frac{n+m}{n-m}\Rightarrow x=\frac{(m+n)^2}{(m-n)^2}$

6.158 a) $2a^2\cdot\frac{2}{a}\cdot x=-\frac{a^3}{2a}\Rightarrow x=-a$ b) $\frac{1}{b^2}\cdot x=\frac{3}{b}\cdot\frac{1}{3b}\Rightarrow x=1$

6.159 a) 100 : 1 b) 10 : 1 c) 3 : 1 d) $\frac{3}{2}$: 1

6.160 a) $\frac{6}{5}$: 1 b) 4,5 : 1 c) 9 : 1 d) 60 : 1

6.161 a) richtig: in beiden Fällen ist $a\cdot d = b\cdot c$
b) falsch: einmal ist $a\cdot d = b\cdot c$, das andere Mal ist $a\cdot c = b\cdot d$
c) richtig: $a\cdot d = b\cdot c$, $a\cdot d + a\cdot c = b\cdot c + a\cdot c$, $a\cdot(d+c) = c\cdot(b+a)$, $a : (b+a) = c : (d+c)$
d) richtig: $a\cdot d = b\cdot c$, $\frac{a\cdot d}{7}=\frac{b\cdot c}{7}$, $a : b = \frac{c}{7}:\frac{d}{7}$

6.162 a) $\bar{x}=\frac{1+25}{2}=13$; $\bar{x}_g=\sqrt{1\cdot 25}=5$ b) $\bar{x}=50{,}5$; $\bar{x}_g=\sqrt{1\cdot 100}=10$
c) $\bar{x}=5{,}05$; $\bar{x}_g=\sqrt{0{,}1\cdot 10}=1$ d) $\bar{x}=1{,}5$; $\bar{x}_g=\sqrt{1\cdot 2}=\sqrt{2}$

6.163 c Basis, a Schenkel: c : a = 2 : 5 oder c = 2k, a = 5k; c + 2a = 2k + 10k = 12k = 144 $\Rightarrow$ k = 12; Basis c = 2·12 = 24 cm; Schenkel a = 5·12 = 60 cm

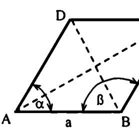
6.164 $\alpha = 72°$; $\beta : \gamma = 4 : 5$ oder $\beta = 4k$, $\gamma = 5k$; $\alpha + \beta + \gamma = 72° + 4k + 5k = 180° \Rightarrow k = 12$; zweiter Winkel $\beta = 4\cdot 12 = 48°$, dritter Winkel $\gamma = 5\cdot 12 = 60°$

6.165 $\alpha = 150°$, $\beta = 138°$, $\gamma = 3k$, $\delta = 5k$; $\alpha + \beta + 3k + 5k = 360° \Rightarrow k = 9$; $\gamma = 27°$; $\delta = 45°$

6.166 a) $d_2=\frac{9\cdot 35}{18}=17{,}5$ mm b) $z_2=\frac{12\cdot 20}{12}=20$ Zähne

6.167 a) $d_2=\frac{20\cdot 24}{16}=30$ mm b) $z_1=\frac{40\cdot 40}{100}=16$ Zähne

6.168 a) $n_2=\frac{63\cdot 18}{35}=32{,}4$ Upm b) $z_2=\frac{192\cdot 14}{48}=56$ Zähne



Zu 6.169

6.169 $\beta = 180° - \alpha$; $\beta = 2\alpha$, $2\alpha = 180° - \alpha \Rightarrow \alpha = 60°$; $\beta = 120°$

6.170 Deltoid: a = d, b = c; a : b = 2 : 5 oder a = 2k, b = 5k; 2·2k + 2·5k = 98 $\Rightarrow$ k = 7; Seiten: 14 cm und 35 cm

6.171 $h = 2a; V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot 2a = 144 \Rightarrow a = 6\text{ cm};\ h = 12\text{ cm}$

6.172 $r_1 : r_2 = 2 : 5 \Rightarrow r_1 = 2k, r_2 = 5k$
a) $O_1 : O_2 = 4\pi \cdot r_1{}^2 : 4\pi \cdot r_2{}^2 = r_1{}^2 : \cdot r_2{}^2 = (2k)^2 : (5k)^2 = 4 : 25$
b) $V_1 : V_2 = \frac{4\pi}{3} \cdot r_1^3 : \frac{4\pi}{3} \cdot r_2^3 = r_1^3 : r_2^3 = (2k)^3 : (5k)^3 = 8 : 125$
c) $d_1 : d_2 = 2r_1 : 2r_2 = r_1 : r_2 = 2 : 5$

6.173 $F_1 : 5000 = A_1 : A_2 = \frac{\pi}{4} \cdot 8^2 : \frac{\pi}{4} \cdot 80^2 \Rightarrow F_2 = 50\text{ N}$

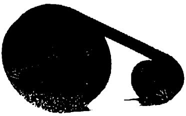
6.174 a) $v_1 : v_2 = A_2 : A_1 = \left(\frac{\pi}{4} \cdot r_2^2\right) : \left(\frac{\pi}{4} \cdot r_1^2\right) = r_2^2 : r_1^2$ oder damit $r_1^2 : r_2^2 = v_2 : v_1$

b) $d_2 = \frac{3}{4} \cdot d_1$, auch $r_2 = \frac{3}{4} \cdot r_1$; $9 : v_2 = \frac{9}{16} \cdot r_1{}^2 : r_1{}^2 \Rightarrow v_2 = 16\text{ m s}^{-1}$

6.175 $r : h = 2 : 3$ oder $r = 2k, h = 3k; O = 2\pi r \cdot (h + r) = 2\pi \cdot 2k \cdot (2k + 3k) = 80\pi \Rightarrow k = 2$;
$r = 4\text{ cm}; h = 6\text{ cm}$

6.176 $r : s = 2 : 5$ oder $r = 2k, s = 5k; O = \pi r \cdot (r + s) = \pi \cdot 2k \cdot (2k + 5k) = k = 5; r = 10\text{ cm}, s = 25\text{ cm}$

6.177 a) Umfangsgeschwindigkeiten müssen gleich sein:
$d_1 \cdot \pi \cdot n_1 = d_2 \cdot \pi \cdot n_2 \Rightarrow n_1 : n_2 = d_2 : d_1$
b) $d_2 = \frac{n_1 \cdot d_1}{n_2} = \frac{2000 \cdot 180}{3600} = 100\text{ mm}$



6.178 Kalkmenge x, Sandmenge y (jeweils in m^3);
$x : y = 2 : 6 \Rightarrow y = 3x$
a) $x = 8\text{ m}^3; y = 3 \cdot 8 = 24\text{ m}^3$ b) $y = 8\text{ m}^3;\ x = y/3 \approx 2{,}7\text{ m}^3$

6.179
a) $x : y = 2 : \mathbf{3},\ y : z = \mathbf{4} : 5$
$x : y = 8 : 12,\ y : z = 12 : 15$
$x : y : z = 8 : 12 : 15$

b) $a : b = 5 : \mathbf{2},\ b : c = \mathbf{3} : 4$
$a : b = 15 : 6, b : c = 6 : 8$
$a : b : c = 15 : 6 : 8$

c) $u : v = 4 : \mathbf{1}, v : w = \mathbf{3} : 5$
$u : v = 12 : 3, v : w = 3 : 5$
$u : v : w = 12 : 3 : 5$

6.180
a) $a : b = 3 : \mathbf{5},\ b : c = \mathbf{3} : 5$
$a : b = 9 : 15,\ b : c = 15 : 25$
$a : b : c = 9 : 15 : 25$

b) $x : y = 4 : \mathbf{3},\ y : z = \mathbf{5} : 7$
$x : y = 20 : 15,\ y : z = 15 : 21$
$x : y : z = 20 : 15 : 21$

c) $u : v = 5 : \mathbf{6}, v : w = \mathbf{7} : 5$
$u : v = 35{:}42, v : w = 42{:}30$
$u : v : w = 35 : 42 : 30$

6.181
a) $a : b : c = 5 : 3 : 6$
$a : b = 5 : 3, b : c = 3 : 6$
$a : b = 5 : 3, b : c = 1 : 2$

b) $a : b : c = 0{,}8 : 0{,}3 : 1$
$a : b = 0{,}8 : 0{,}3, b : c = 0{,}3 : 1$
$a : b = 8 : 3,\ b : c = 3 : 10$

c) $F_1 : F_2 : F_3 = 100\text{ N} : 150\text{ N} : 80\text{ N}$
$F_1 : F_2 = 100\text{ N} : 150\text{ N},$
$F_2 : F_3 = 150\text{ N} : 80\text{ N}$
$F_1 : F_2 = 2\text{ N} : 3\text{ N} = 2 : 3$
$F_2 : F_3 = 15\text{ N} : 8\text{ N} = 15 : 8$

d) $R_1 : R_2 : R_3 = 8\,\Omega : 10\,\Omega : 30\,\Omega$
$R_1 : R_2 = 8\,\Omega : 10\,\Omega, R_2 : R_3 = 10\,\Omega : 30\,\Omega$
$R_1 : R_2 = 4\,\Omega : 5\,\Omega = 4 : 5$
$R_2 : R_3 = 1\,\Omega : 3\,\Omega = 1 : 3$

e) $t_1 : t_2 : t_3 = 0{,}1\text{ s} : 0{,}08\text{ s} : 0{,}05\text{ s}$
$t_1 : t_2 = 0{,}1\text{ s} : 0{,}08\text{ s}$
$t_2 : t_3 = 0{,}08\text{ s} : 0{,}05\text{ s}$
$t_1 : t_2 = 5\text{ s} : 4\text{ s} = 5 : 4$
$t_2 : t_3 = 8\text{ s} : 5\text{ s} = 8 : 5$

f) $I_1 : I_2 : I_3 = 0{,}6\text{ mA} : 20\,\mu\text{A} : 0{,}005\text{ A}$
$I_1 : I_2 = 600\text{ A} : 20\text{ A}, I_2 : I_3 = 20\text{ A} : 50000\text{ A}$
$I_1 : I_2 = 30\text{ A} : 1\text{ A} = 30 : 1$
$I_2 : I_3 = 1\text{ A} : 250\text{ A} = 1 : 250$

6.182
a) $a : b : c = 3 : 5 : 6$
$a : b = 3 : 5,\ b : c = 5 : 6$

b) $x : y : z = 1 : 4 : 6$
$x : y = 1 : 4,\ y : z = 4 : 6 = 2 : 3$

c) $u : v : w = 2 : 5 : 9$
$u : v = 2 : 5, v : w = 5 : 9$

d) $x : y : z = 1 : 2 : 5$
$x : y = 1 : 2,\ y : z = 2 : 5$

6.183 $\alpha = 2k, \beta = 3k, \gamma = 4k; 2k + 3k + 4k = 180° \Rightarrow k = 20°; \alpha = 40°, \beta = 60°, \gamma = 80°$

6.184 $a = 3k, b = 4k, c = 5k; 3k + 4k + 5k = 96 \Rightarrow k = 8\text{ cm};\ a = 24\text{ cm}, b = 32\text{ cm}, c = 40\text{ cm}$

6.185 $\alpha = 60°; \beta = k, \gamma = 5k, \delta = 4k; \alpha + k + 5k + 4k = 360° \Rightarrow k = 30°; \beta = 30°, \gamma = 150°, \delta = 120°$

6.186 $U = R \cdot I \Rightarrow I = \frac{U}{R} = \frac{32}{4} = 8$ A; $I_1 = 2k$, $I_2 = 4k$, $I_3 = 10k$; $I_1 + I_2 + I_3 = 2k + 4k + 10k = I = 8 \Rightarrow$
$k = 0{,}5$; $I_1 = 1$ A, $I_2 = 2$ A, $I_3 = 5$ A;
$R_1 \cdot I_1 = R_2 \cdot I_2 \Rightarrow R_1 : R_2 = I_2 : I_1 = 2 : 1$; $R_2 \cdot I_2 = R_3 \cdot I_3 \Rightarrow R_2 : R_3 = I_3 : I_2 = 5 : 2$;
$R_1 : R_2 = 10 : 5$; $R_2 : R_3 = I_3 : I_2 = 5 : 2 \Rightarrow R_1 : R_2 : R_3 = 10 : 5 : 2$

6.187 $l = 2k$, $b = 3k$, $h = 5k$; $2k \cdot 3k \cdot 5k = 240 \Rightarrow k = 2$; $l = 4$ cm, $b = 6$ cm, $h = 10$ cm

6.188 $l = 3k$, $b = 2k$, $h = 6k$; $2 \cdot 3k \cdot 2k + 2 \cdot 3k \cdot 6k + 2 \cdot 2k \cdot 6k = 1152 \Rightarrow k = 4$; $l = 12$ cm, $b = 8$ cm, $h = 24$ cm

6.189 a) $R_1 = 3k$, $R_2 = 4k$, $R_3 = 5k$; $3k + 4k + 5k = 60 \Rightarrow k = 5$; $R_1 = 15\,\Omega$, $R_2 = 20\,\Omega$, $R_3 = 25\,\Omega$
b) $U_1 = R_1 \cdot I$, $U_2 = R_2 \cdot I$, $U_3 = R_3 \cdot I$; I als Proport. faktor (wie k) $\Rightarrow U_1 : U_2 : U_3 = R_1 : R_2 : R_3$

6.190 a, b, c Beträge von A, B bzw. C; $a = 3k$, $b = 3k$, $c = 4k$; $3k + 3k + 4k = 1\,000\,000 \Rightarrow$
$k = 100\,000$; A bekommt € 300 000; B bekommt € 300 000; C bekommt € 400 000

6.191 $U_1 = 2k$, $U_2 = 4k$, $U_3 = 5k$; $2k + 4k + 5k = 22 \Rightarrow k = 2$; $U_1 = 4$ V, $U_2 = 8$ V, $U_3 = 10$ V

6.192
4 Arb. ... 6 Tage
6 Arb. ... x Tage
$x : 6 = 4 : 6 \Rightarrow x = 4$.
Sie brauchen 4 Tage.

6.193
50 min ... 40 m³
32 min ... x m³
$x : 40 = 32 : 50 \Rightarrow x = 25{,}6$.
25,6 m³ werden gefördert.

6.194
20x30 ... 23,7 kg
40x50 ... x kg
$x : 23{,}7 = (40\ 50) : (20 \cdot 30)$
$\Rightarrow x = 79$; 79 kg Masse.

6.195
71 g Cl_2 ... 146 g HCl
15 g Cl_2 ... x g HCl
$x : 146 = 15 : 71 \Rightarrow$
$x = 30{,}85$; ca. 31 g nötig

6.196
45 Z ... 21 U/min
15 Z ... x U/min
$x : 21 = 45 : 15 \Rightarrow x = 63$;
2. Kettenrad: 63 U/min

6.197
36 mm ... 12 Zähne
72 mm ... x Zähne
$x : 12 = 72 : 36 \Rightarrow x = 24$;
2. Stirnrad: 24 Zähne

6.198
10 Ω ... 2 A
5 Ω ... x A
$x : 2 = 10 : 5 \Rightarrow x = 4$
Stromstärke: 4 A

6.199
200 mm ... 120 cm³
45 mm ... x cm³
$x : 120 = 45 : 200 \Rightarrow$
$x = 27$; Volumen: 27 cm³

6.200
120 mm ... 3300 Upm
180 mm ... x Upm
$x : 3300 = 120 : 180 \Rightarrow$
$x = 2200$; 2200 Upm

6.201 a) $x > 2x - 3 \mid +3 - x$
$3 > x$ oder $x < 3$
$L =]-\infty, 3[$

b) $3a + 7 \cdot (a-1) \geq a - 6 \cdot (3a + 2)$
$10a - 7 \geq -17a - 12$
$27a \geq -5$
$a \geq -\frac{5}{27}$, $L = [-5/27, \infty[$

c) $4b - 2 \leq 3b - (2b - 2)$
$4b - 2 \leq b + 2$
$3b \leq 4$
$b \leq \frac{4}{3}$, $L =]-\infty, 4/3]$

6.202 a) $2x + 3 - (x-4) + 3x < 5 \cdot (x-3) + 2x - (2-x)$
$2x + 3 - x + 4 + 3x < 5x - 15 + 2x - 2 + x$
$-4x < -24$
$x > 6$; $L =]6, \infty[$

b) $4x - (5+x) - (x+2) > 3x + 3 \cdot (3-x) + 4$
$4x - 5 - x - x - 2 > 3x + 9 - 3x + 4$
$2x > 20$
$x > 10$; $L =]10, \infty[$

6.203 a) $3a - 3 \cdot (a+3) - 2 \cdot (a-1)^2 < -2 \cdot (a+1)^2 + 3a$
$3a - 3a - 9 - 2 \cdot (a^2 - 2a + 1) < -2 \cdot (a^2 + 2a + 1) + 3a$
$3a - 3a - 9 - 2a^2 + 4a - 2 < -2a^2 - 4a - 2 + 3a$
$5a < 9$
$a < \frac{9}{5}$; $L =]-\infty, 9/5[$

b) $4b + (b-1) \cdot (b+1) - 2 \cdot (b+2) \geq 2b^2 - (b+1)^2 + 3b$
$4b + b^2 - 1 - 2b - 4 \geq 2b^2 - (b^2 + 2b + 1) + 3b$
$4b + b^2 - 1 - 2b - 4 \geq 2b^2 - b^2 - 2b - 1 + 3b$
$b \geq 4$; $L = [4, \infty[$

6.204 a) $(2x+3)\cdot(4x-8)+(x+1)^2>9\cdot(x-1)\cdot(x+1)+4$

$8x^2-4x-24+x^2+2x+1>9\cdot(x^2-1)+4$

$9x^2-2x-23>9x^2-9+4$

$-2x>18$

$x<-9$; $L=\,]-\infty,-9[$

b) $(2-3x)^2-(x+2)^2+26\le\frac{1}{2}\cdot(4x+2)^2$

$4-12x+9x^2-(x^2+4x+4)+26\le$

$\le\frac{1}{2}\cdot(16x^2+16x+4)$

$4-12x+9x^2-x^2-4x-4+26\le 8x^2+8x+2$

$-24x\le-24$

$x\ge1$; $L=[1,\infty[$

6.205 a) $(a+1)^3-a^3-(a-1)^2>2\cdot(a+5)^2-5$

$a^3+3a^2+3a+1-a^3-(a^2-2a+1)>$

$>2\cdot(a^2+10a+25)-5$

$a^3+3a^2+3a+1-a^3-a^2+2a-1>$

$>2a^2+20a+50-5$

$-15a>45$

$a<-3$; $L=\,]-\infty,-3[$

b) $(2b+1)^2-2\cdot(b+1)^2\ge 2b^2+b-(2b+3)$

$4b^2+4b+1-2\cdot(b^2+2b+1)\ge 2b^2+b-2b-3$

$4b^2+4b+1-2b^2-4b-2\ge 2b^2+b-2b-3$

$b\ge-2$;

$L=[-2,\infty[$

6.206 a) $\frac{3x-2}{3}\ge\frac{4x-5}{2}$

$6x-4\ge12x-15$

$-6x\ge-11$

$x\le\frac{11}{6}$; $L=\,]-\infty, 11/6[$

b) $\frac{5x-3}{3}+\frac{2x-3}{6}\le\frac{4x-5}{2}$

$10x-6+2x-3\le12x-15$

$0\le-6$; $L=\{\ \}$

c) $\frac{3a-2}{2}-\frac{2a+1}{3}\ge\frac{2a}{3}$

$9a-6-4a-2\ge4a$

$a\ge8$

$L=[8,\infty[$

6.207 a) $5+\frac{2x-6}{5}\le1$

$25+2x-6\le5$

$2x\le-14$

$x\le-7$

$L=\,]-\infty,-7]$

b) $1-\frac{2x+4}{3}>\frac{2x-2}{4}$

$1-\frac{2x+4}{3}>\frac{x-1}{2}$

$6-2\cdot(2x+4)>3\cdot(x-1)$

$6-4x-8>3x-3$

$-7x>-1$

$x<\frac{1}{7}$; $L=\,]-\infty, 1/7[$

c) $\frac{2b+2}{3}-\frac{b}{6}\ge\frac{b}{3}-\frac{2b+6}{4}$

$\frac{2b+2}{3}-\frac{b}{6}\ge\frac{b}{3}-\frac{b+3}{2}$

$4b+4-b\ge2b-3b-9$

$4b\ge-13$

$b\ge-\frac{13}{4}$; $L=[-13/4,\infty[$

6.208 a) Fall 1: $x\ge0$: $|x|=x<3$; $L_1=[0,3[$

Fall 2: $x<0$: $|x|=-x<3$; $x>-3$; $L_2=\,]-3,0[$

$L=L_1\cup L_2=\,]-3,3[$

b) Fall 1: $x\ge0$: $|x|=x\ge-3$; $L_1=[0,\infty[$

Fall 2: $x<0$; $|x|=-x\ge-3$; $x\le3$; $L_2=\,]-\infty,0[$

$L=L_1\cup L_2=\,]-\infty,\infty[$

c) $2\cdot|2x|<3$; $|2x|<3/2$

Fall 1: $2x\ge0$; $x\ge0$

$2x<3/2$, $x<3/4$; $L_1=[0,3/4[$

Fall 2: $2x<0$; $x<0$

$-2x<3/2$, $x>-3/4$; $L_2=\,]-3/4,0[$

$L=L_1\cup L_2=\,]-3/4,3/4[$

d) Fall 1: $3x\ge0$; $x\ge0$

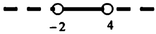
$3x<4/5$, $x<4/15$; $L_1=[0,4/15[$

Fall 2: $3x<0$; $x<0$

$-3x<4/5$, $x>-4/15$; $L_2=\,]-4/15,0[$

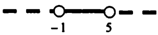
$L=L_1\cup L_2=\,]-4/15,4/15[$

6.209 a) Fall 1: $x-1 \geq 0, x \geq 1$
$x-1 < 3, x < 4; L_1 = [1, 4[$
Fall 2: $x-1 < 0; x < 1$
$-(x-1) < 3, -x+1 < 3; x > -2; L_2 =]-2, 1[$
$L = L_1 \cup L_2 =]-2, 4[$

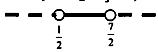


b) Fall 1: $x+1 \geq 0, x \geq -1$
$x+1 \geq 3, x \geq 2; L_1 = [2, \infty[$
Fall 2: $x+1 < 0; x < -1$
$-(x+1) \geq 3, -x-1 \geq 3; x \leq -4; L_2 =]-\infty,-4]$
$L = L_1 \cup L_2 =]-\infty,-4] \cup [2, \infty[= R\backslash]-4, 2[$

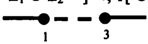
c) Fall 1: $2-x \geq 0, -x \geq -2, x \leq 2$
$2-x < 3, -x < 1, x > -1; L_1 =]-1, 2]$
Fall 2: $2-x < 0; -x < -2, x > 2$
$-(2-x) < 3, -2+x < 3; x < 5; L_2 =]2, 5[$
$L = L_1 \cup L_2 =]-1, 5[$



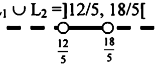
d) Fall 1: $x/2-1 \geq 0, x/2 \geq 1, x \geq 2$
$x/2-1 < 3/4, x/2 < 7/4, x < 7/2; L_1 = [2, 7/2[$
Fall 2: $x/2-1 < 0; x/2 < 1, x < 2$
$-(x/2-1) < 3/4, -x/2 < -1/4, x > 1/2; L_2 =]1/2, 2[$
$L = L_1 \cup L_2 =]1/2, 7/2[$



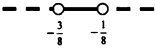
6.210 a) Fall 1: $2a-4 \geq 0, 2a \geq 4, a \geq 2$
$2a-4 \geq 2, 2a \geq 6, a \geq 3; L_1 = [3, \infty[$
Fall 2: $2a-4 < 0, 2a < 4, a < 2$
$-(2a-4) \geq 2, -2a \geq -2; a \leq 1; L_2 =]-\infty, 1]$
$L = L_1 \cup L_2 =]-\infty, 1[\cup [3, \infty[= R \backslash]1, 3[$



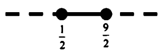
b) Fall 1: $b-3 \geq 0, b \geq 3$
$b-3 < 3/5, b < 18/5; L_1 = [3, 18/5[$
Fall 2: $b-3 < 0, b < 3$
$-(b-3) < 3/5, b > 12/5; L_2 =]12/5, 3[$
$L = L_1 \cup L_2 =]12/5, 18/5[$



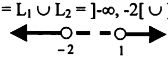
c) Fall 1: $a + 1/4 \geq 0, a \geq -1/4$
$a + 1/4 < 1/8, a < -1/8; L_1 = [-1/4, -1/8[$
Fall 2: $a + 1/4 < 0, a < -1/4$
$-(a + 1/4) < 1/8, a > -3/8; L_2 =]-3/8, -1/4[$
$L = L_1 \cup L_2 =]-3/8, -1/8[$



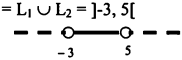
d) Fall 1: $x/3 - 5/6 \geq 0, 2x - 5 \geq 0, x \geq 5/2$
$x/3 - 5/6 \leq 2/3, x \leq 9/2, L_1 = [5/2, 9/2]$
Fall 2: $x/3 - 5/6 < 0, x > 5/2$
$-(x/3 - 5/6) \leq 2/3, x \geq 1/2; L_2 = [1/2, 5/2[$
$L = L_1 \cup L_2 = [1/2, 9/2]$



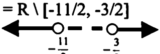
6.211 a) $(x+1)/2 - 1/4 = (2x+1)/4$
Fall 1: $(2x+1)/4 \geq 0, x \geq -1/2$
$(2x+1)/4 > 3/4, 2x+1>3, x >1, L_1 =]1, \infty[$
Fall 2: $(2x+1)/4 < 0, x < -1/2$
$-(2x+1)/4 > 3/4, x < -2, L_1 =]- \infty, -2[$
$L = L_1 \cup L_2 =]-\infty, -2[\cup]1, \infty[= R \backslash [-2, 1]$



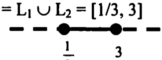
b) $1 - (x+1)/2 = (1-x)/2$
Fall 1: $(1-x)/2 \geq 0, 1-x \geq 0, x \leq 1$
$(1-x)/2 < 2, 1-x <4, x >-3, L_1 =]-3, 1]$
Fall 2: $(1-x)/2 < 0, x > 1$
$-(1-x)/2 < 2, -1+x <4, x < 5, L_1 = [1, 5[$
$L = L_1 \cup L_2 =]-3, 5[$



c) $(2x-1)/2 + 4 = (2x + 7)/2$
Fall 1: $(2x + 7)/2 \geq 0, \ x \geq -7/2$
$(2x + 7)/2 > 2, x > -3/2; L_1 =]-3/2, \infty[$
Fall 2: $(2x + 7)/2 < 0, \ x < -7/2$
$-(2x + 7)/2 > 2, x < -11/2; L_1=]-\infty, -11/2[$
$L = L_1 \cup L_2 =]-\infty, -11/2[\cup]-3/2, \infty[=$
$= R \backslash [-11/2, -3/2]$



d) $3 \cdot (x+1)/4 - 5 = (3x - 5)/4$
Fall 1: $(3x - 5)/4 \geq 0, x \geq 5/3$
$(3x - 5)/4 \leq 1, x \leq 3, L_1 = [5/3, 3]$
Fall 2: $(3x - 5)/4 < 0, x < 5/3$
$-(3x - 5)/4 \leq 1, x \geq 1/3, L_1 = [1/3, 5/3[$
$L = L_1 \cup L_2 = [1/3, 3]$



6.212 a) 1. Fall: $x + 3 > 0$, d.h. $x > -3$

$\frac{x}{x+3} < 4 \,|\cdot(x+3)$

$x < 4x + 12$

$-3x < 12$; $x > -4$; $L_1 =]-3, \infty[$

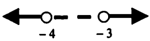
2. Fall: $x+3 < 0$, d.h. $x < -3$

$\frac{x}{x+3} < 4 \,|\cdot(x+3)$

$x > 4x + 12$

$-3x > 12$; $x < -4$; $L_2 =]-\infty, -4[$

$L = L_1 \cup L_2 =]-\infty, -4[\cup]-3, \infty[= R\backslash[-4, -3]$ $x \neq -3$



b) 1. Fall: $x - 2 > 0$, d.h. $x > 2$

$\frac{3}{x-2} > 0 \,|\cdot(x-2)$

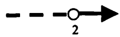
$3 > 0$; $L_1 =]2, \infty[$

2. Fall: $x - 2 < 0$, d.h. $x < 2$

$\frac{3}{x-2} > 0 \,|\cdot(x-2)$

$3 < 0$; $L_2 = \{\}$

$L = L_1 \cup L_2 = L_1 =]2, \infty[$; $x \neq 2$



c) 1. Fall: $2+x > 0$, d.h. $x > -2$

$\frac{5}{2+x} < 5 \,|\cdot(2+x)$

$5 < 10 + 5x$

$-5 < 5x$; $x > -1$; $L_1 =]-1, \infty[$

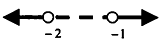
2. Fall: $2+x < 0$, d.h. $x < -2$

$\frac{5}{2+x} < 5 \,|\cdot(2+x)$

$5 > 10 + 5x$

$-5 > 5x$; $x < -1$; $L_2 =]-\infty, -2[$

$L = L_1 \cup L_2 =]-\infty, -2[\cup]-1, \infty[= R\backslash[-2, -1]$ $x \neq -2$



d) 1. Fall: $x + 1 > 0$, d.h. $x > -1$

$\frac{2x}{x+1} \geq \frac{4}{5} \,|\cdot 5(x+1)$

$10x \geq 4x + 4$

$6x \geq 4$; $x \geq 2/3$; $L_1 = [2/3, \infty[$

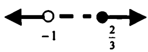
2. Fall: $x + 1 < 0$, d.h. $x < -1$

$\frac{2x}{x+1} \geq \frac{4}{5} \,|\cdot 5(x+1)$

$10x \leq 4x + 4$

$6x \leq 4$; $x \leq 2/3$; $L_2 =]-\infty, -1[$

$L = L_1 \cup L_2 =]-\infty, -1[\cup [2/3, \infty[$; $x \neq -1$



6.213 a) 1. Fall: $x > 0$

$\frac{2}{3} \leq \frac{x-2}{x} \,|\cdot 3x$

$2x \leq 3x - 6$; $-x \leq -6$; $x \geq 6$; $L_1 = [6, \infty[$

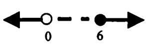
2. Fall: $x < 0$

$\frac{2}{3} \leq \frac{x-2}{x} \,|\cdot 3x$

$2x \geq 3x - 6$

$-x \geq -6$; $x \leq 6$; $L_2 =$

$L = L_1 \cup L_2 =]-\infty, 0[\cup [6, \infty[$; $x \neq 0$



b) 1. Fall: $x - 3 > 0$, d.h. $x > 3$

$\frac{2}{x-3} < 4 \,|\cdot(x-3)$

$2 < 4x - 12$; $14 < 4x$; $x < 7/2$; $L_1 =]7/2, \infty[$

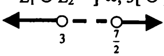
2. Fall: $x - 3 < 0$, d.h. $x < 3$

$\frac{2}{x-3} < 4 \,|\cdot(x-3)$

$2 > 4x - 12$

$14 > 4x$; $x < 7/2$; $L_2 =]-\infty, 3[$

$L = L_1 \cup L_2 =]-\infty, 3[\cup]7/2, \infty[$; $x \neq 3$



c) 1. Fall: $4 - x > 0$, d.h. $x < 4$

$\frac{5}{4-x} \geq 6 \,|\cdot(4-x)$

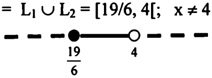
$5 \geq 24-6x$; $6x \geq 19$; $x \geq 19/6$; $L_1 = [19/6, 4[$

2. Fall: $4 - x < 0$, d.h. $x > 4$

$\frac{5}{4-x} \geq 6 \,|\cdot(4-x)$

$5 \leq 24 - 6x$; $x \leq 19/6$; $L_2 = \{\}$

$L = L_1 \cup L_2 = [19/6, 4[$; $x \neq 4$



d) 1. Fall: $1 - x > 0$, d.h. $x < 1$

$\frac{3x}{1-x} \leq \frac{3}{5} \,|\cdot 5(1-x)$

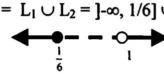
$15x \leq 3-3x$; $18x \leq 3$; $x \leq 1/6$; $L_1 =]-\infty, 1/6]$

2. Fall: $1 - x < 0$, d.h. $x > 1$

$\frac{3x}{1-x} \leq \frac{3}{5} \,|\cdot 5(1-x)$

$15x \geq 3 - 3x$; $18x \geq 3$; $x \geq 1/6$; $L_2 =]1, \infty[$

$L = L_1 \cup L_2 =]-\infty, 1/6] \cup]1, \infty[$; $x \neq 1$



6.214 a) 1.Fall: $x + 2 > 0$, d.h. $x > -2$

$\frac{4}{x+2} < \frac{6}{5} \,\Big|\, \cdot 5(x+2)$

$20 < 6x + 12$

$8 < 6x$; $x > 4/3$; $L_1 =]4/3, \infty[$

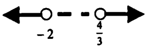
2.Fall: $x + 2 < 0$, d.h. $x < -2$

$\frac{4}{x+2} < \frac{6}{5} \,\Big|\, \cdot 5(x+2)$

$20 > 6x + 12$

$8 > 6x$; $x < 4/3$; $L_2 =]-\infty, -2[$

$L = L_1 \cup L_2 =]-\infty, -2[\cup]4/3, \infty[$; $x \neq -2$



b) 1.Fall: $a + 3 > 0$, d.h. $a > -3$

$\frac{a^2}{a+3} \le \frac{4}{3} + a \,\Big|\, \cdot 3(a+3)$

$3a^2 \le 4a + 12 + 3a^2 + 9a$

$-12 \le 13a$; $a \ge -12/13$; $L_1 = [-12/13, \infty[$

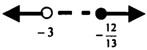
2.Fall: $a + 3 < 0$, d.h. $a < -3$

$\frac{a^2}{a+3} \le \frac{4}{3} + a \,\Big|\, \cdot 3(a+3)$

$3a^2 \ge 4a + 12 + 3a^2 + 9a$

$-12 \ge 13a$; $a \le -12/13$; $L_2 =]-\infty, -3[$

$L = L_1 \cup L_2 =]-\infty, -3[\cup [-12/13, \infty[$; $a \neq -3$



c) 1. Fall: $2 - b > 0$ und $b > 0$, kurz: $0 < b < 2$; es ist $b\cdot(2-b) > 0$ ("+" mal "+" ergibt "+")

$\frac{b}{2-b} > -\frac{b+1}{b} \,\Big|\, b\cdot(2-b)$

$b^2 > -(b+1)\cdot(2-b) = b^2 - b - 2$; $b > -2$; $L_1 =]0, 2[$

2. Fall: $2 - b < 0$ und $b > 0$, $b > 2$ und $b > 0$, kurz: $b > 2$; es ist $b\cdot(2-b) < 0$

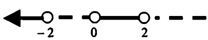
$\frac{b}{2-b} > -\frac{b+1}{b} \,\Big|\, b\cdot(2-b)$

$b^2 < -(b+1)\cdot(2-b) = b^2 - b - 2$; $b < -2$; $L_2 = \{\}$

3. Fall: $2 - b > 0$ und $b < 0$, $b < 2$ und $b < 0$, kurz: $b < 0$; es ist $b\cdot(2-b) < 0$

$\frac{b}{2-b} > -\frac{b+1}{b} \,\Big|\, b\cdot(2-b)$

$b^2 < -(b+1)\cdot(2-b) = b^2 - b - 2$; $b < -2$; $L_3 =]-\infty, -2[$



4. Fall: $2 - b < 0$ und $b < 0$, $b > 2$ und $b < 0$, nicht möglich, $L_4 = \{\}$

$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 =]-\infty, -2[\cup]0, 2[$; $b \neq 2, b \neq 0$

6.215 a) 1. Fall: $2 - a > 0$ und $a + 2 > 0$, $a < 2$ und $a > -2$, kurz: $-2 < a < 2$; es ist $(2-a)\cdot(a+2) > 0$

$\frac{a}{2-a} \ge \frac{a}{a+2} \,\Big|\, (2-a)\cdot(a+2)$

$a^2 + 2a \ge 2a - a^2$, $2a^2 \ge 0$ für alle a erfüllt; $L_1 =]-2, 2[$

2. Fall: $2 - a < 0$ und $a + 2 > 0$, $a > 2$ und $a > -2$, kurz: $a > 2$; es ist $(2-a)\cdot(a+2) < 0$

$\frac{a}{2-a} \ge \frac{a}{a+2} \,\Big|\, (2-a)\cdot(a+2)$

$a^2 + 2a \le 2a - a^2$, $2a^2 \le 0$; $a = 0$, $L_2 = \{\}$

3. Fall: $2 - a > 0$ und $a + 2 < 0$, $a < 2$ und $a < -2$, kurz: $a <- 2$; es ist $(2-a)\cdot(a+2) < 0$

$\frac{a}{2-a} \ge \frac{a}{a+2} \,\Big|\, (2-a)\cdot(a+2)$

$a^2 + 2a \le 2a - a^2$, $2a^2 \le 0$; $a = 0$, $L_3 = \{\}$

4. Fall: $2 - a < 0$ und $a + 2 < 0$, $a > 2$ und $a < -2$, nicht möglich, $L_4 = \{\}$

$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 =]-2, 2[$; $a \neq 2, a \neq -2$

b) 1. Fall: $2+a = a + 2 > 0$, $a > -2$

$\frac{a-3}{2+a} \ge \frac{2a-3}{a+2} \,\Big|\, (2+a)$

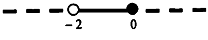
$a-3 \ge 2a - 3$; $a \le 0$; $L_1 =]-2, 0]$

2. Fall: $2+a = a + 2 < 0$, $a < -2$

$\frac{a-3}{2+a} \ge \frac{2a-3}{a+2} \,\Big|\, (2+a)$

$a-3 \le 2a - 3$; $a \ge 0$; $L_2 = \{\}$

$L = L_1 \cup L_2 =]-2, 0]$; $a \neq -2$



6.215 c) 1. Fall: $x+3 > 0$ und $x/2 - 1 > 0$, $x > -3$ und $x > 2$, kurz: $x > 2$; $(x+3)\cdot(x/2-1) > 0$

$\frac{4x-3}{x+3} \le \frac{2x}{x/2-1} \,|\, 2\cdot(x+3)\cdot(x/2-1)$

$4x^2 - 11x + 6 \le 4x^2 + 12x$; $6 \le 23x$, $x \ge 6/23$; $L_1 =]2, \infty[$

2. Fall: $x+3 > 0$ und $x/2 - 1 < 0$, $x > -3$ und $x < 2$, kurz: $-3 < x < 2$; $(x+3)\cdot(x/2-1) < 0$

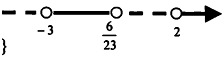
$\frac{4x-3}{x+3} \le \frac{2x}{x/2-1} \,|\, 2\cdot(x+3)\cdot(x/2-1)$

$4x^2 - 11x + 6 \ge 4x^2 + 12x$; $6 \ge 23x$, $x \le 6/23$;; $L_2 =]-3, 6/23[$

3. Fall: $x+3 < 0$ und $x/2 - 1 > 0$, $x < -3$ und $x > 2$; nicht möglich, $L_3 = \{\}$

4. Fall: $x+3 < 0$ und $x/2 - 1 < 0$, $x < -3$ und $x < 2$, kurz: $x < -3$; $(x+3)\cdot(x/2-1) > 0$

$\frac{4x-3}{x+3} \le \frac{2x}{x/2-1} \,|\, 2\cdot(x+3)\cdot(x/2-1)$



$4x^2 - 11x + 6 \le 4x^2 + 12x$; $6 \le 23x$, $x \ge 6/23$; $L_4 = \{\}$

$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 =]-3, 6/23[\cup]2, \infty[$; $x \ne -3$, $x \ne 2$

6.216 a) 1. Fall: $2x - 2 > 0$ und $4x > 0$, $x > 1$ und $x > 0$, kurz: $x > 1$; $(2x-2)\cdot 4x > 0$

$\frac{x}{2x-2} \le \frac{2x+1}{4x} \,|\, 4x\cdot(x-1)$; $2x^2 \le 2x^2 - x - 1$, $x \le -1$; $L_1 = \{\}$

2. Fall: $2x - 2 > 0$ und $4x < 0$, $x > 1$ und $x < 0$, nicht möglich, $L_2 = \{\}$

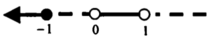
3. Fall: $2x - 2 < 0$ und $4x > 0$, $x < 1$ und $x > 0$, kurz: $0 < x < 1$; $(2x-2)\cdot 4x < 0$

$\frac{x}{2x-2} \le \frac{2x+1}{4x} \,|\, 4x\cdot(x-1)$; $2x^2 \ge 2x^2 - x - 1$, $x \ge -1$; $L_3 =]0, 1[$

4. Fall: $2x - 2 < 0$ und $4x < 0$, $x < 1$ und $x < 0$, kurz: $x < 0$; $(2x-2)\cdot 4x > 0$

$\frac{x}{2x-2} \le \frac{2x+1}{4x} \,|\, 4x\cdot(x-1)$; $2x^2 \le 2x^2 - x - 1$, $x \le -1$; $L_4 =]-\infty, -1]$

$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 =]-\infty, -1] \cup]0, 1[$; $x \ne 1$, $x \ne 0$



b) 1. Fall: $3a + 2 > 0$ und $1 - 6a > 0$, $a > -2/3$ und $a < 1/6$, kurz: $-2/3 < a < 1/6$; $(2a+2)\cdot(1-6a) > 0$

$\frac{2a-3}{3a+2} > \frac{1-4a}{1-6a} \,|\, (3a+2)\cdot(1-6a)$; $-12a^2 + 20a - 3 > -12a^2 - 5a + 2$, $a > 1/5$; $L_1 = \{\}$

2. Fall: $3a + 2 > 0$ und $1 - 6a < 0$, $a > -2/3$ und $a > 1/6$, kurz: $a > 1/6$; $(2a+2)\cdot(1-6a) < 0$

$\frac{2a-3}{3a+2} > \frac{1-4a}{1-6a} \,|\, (3a+2)\cdot(1-6a)$; $-12a^2 + 20a - 3 < -12a^2 - 5a + 2$, $a < 1/5$; $L_2 =]1/6, 1/5[$

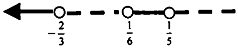
3. Fall: $3a + 2 < 0$ und $1 - 6a > 0$, $a < -2/3$ und $a < 1/6$, kurz: $a < -2/3$; $(2a+2)\cdot(1-6a) < 0$

$\frac{2a-3}{3a+2} > \frac{1-4a}{1-6a} \,|\, (3a+2)\cdot(1-6a)$; $-12a^2 + 20a - 3 < -12a^2 - 5a + 2$, $a < 1/5$; $L_1 =]-\infty, -2/3[$

4. Fall: $3a + 2 < 0$ und $1 - 6a < 0$, $a < -2/3$ und $a > 1/6$; nicht möglich, $L_4 = \{\}$

$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 =]-\infty, -2/3[\cup]1/6, 1/5[$;

$a \ne -2/3$, $a \ne 1/6$



c) 1. Fall: $2 - 3b > 0$ und $4b + 1 > 0$, $b < 2/3$ und $b > -1/4$, kurz: $-1/4 < b < 2/3$; $(2-3b)\cdot(4b+1) > 0$

$\frac{3b}{2-3b} \ge \frac{-4b}{4b+1} \,|\, (2-3b)\cdot(4b+1)$; $12b^2 + 3b \ge 12b^2 - 8b$, $11b \ge 0$, $b \ge 0$; $L_1 = [0, 2/3[$

2. Fall: $2 - 3b > 0$ und $4b + 1 < 0$, $b < 2/3$ und $b < -1/4$, kurz: $b < -1/4$; $(2-3b)\cdot(4b+1) < 0$

$\frac{3b}{2-3b} \ge \frac{-4b}{4b+1} \,|\, (2-3b)\cdot(4b+1)$; $12b^2 + 3b \le 12b^2 - 8b$, $11b \le 0$, $b \le 0$; $L_2 =]-\infty, -1/4[$

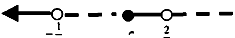
3. Fall: $2 - 3b < 0$ und $4b + 1 > 0$, $b > 2/3$ und $b > -1/4$, kurz: $b > 2/3$; $(2-3b)\cdot(4b+1) < 0$

$\frac{3b}{2-3b} \ge \frac{-4b}{4b+1} \,|\, (2-3b)\cdot(4b+1)$; $12b^2 + 3b \le 12b^2 - 8b$, $11b \le 0$, $b \le 0$; $L_3 = \{\}$

4. Fall: $2 - 3b < 0$ und $4b + 1 < 0$, $b > 2/3$ und $b < -1/4$; nicht möglich, $L_4 = \{\}$

$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4 =]-\infty, -1/4[\cup [0, 2/3[$

$b \ne 2/3$, $b \ne -1/4$



7 Lineare Gleichungssysteme

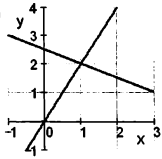
7.1 a) det(A) = $1\cdot 2 - (-2)\cdot(-1) = 0$ b) det(B) = $1\cdot 2 - 2\cdot 1 = 0$
c) det(C) = $-1\cdot(-2) - (-2)\cdot(-1) = 0$ d) det(D) = $3\cdot 3 - 4\cdot 4 = -7$

7.2 a) det(M) = $2\cdot 9 - 4\cdot 6 = -6$ b) det(A) = 50 c) det(C) = 15 d) det(A) = -4

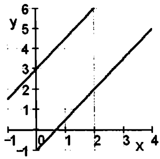
7.3 a) det(A) = $-1\cdot(-4)\cdot 1 + 2\cdot 8\cdot 0 + 3\cdot 2\cdot 3 - [3\cdot(-4)\cdot 0 + (-1)\cdot 8\cdot 3 + 2\cdot 2\cdot 1] = 42$
b) det(M) = $-\frac{121}{24}$ c) det(A) = 356

7.4 a) det(B) = -92 b) det(A) = -362 c) det(B) = 0

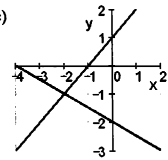
7.5

a) 

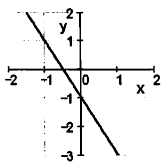
I: $y = 2x$; II: $y = -0{,}5\cdot x + 2{,}5$
S(1/2); L = {(1, 2)}

b) 

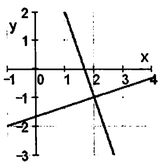
I: $y = 1{,}5\cdot x + 1$; II: $y = 1{,}5\cdot x + 3$;
parallele Gerade, kein Schnitt punkt, keine Lösung: L = { }

c) 

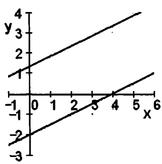
I: $y = -0{,}5\cdot x - 2$; II: $y = x + 1$
S(-2/-1), L = {(-2, -1)}

d) 

I: $y = -2x - 1$; II: $y = -2x - 1$;
zusammenfallende Geraden,
x beliebig, $y = -2x - 1$;
L = {(x,y) | y = -2x -1}

e) 

I: $y = -3x + 5$; II: $y = x/3 - 5/3$
S(2/-1); L = {(2, -1)}

f) 

I: $y = x/2 - 2$; II: $y = x/2 + 4/3$
parallele Gerade, kein Schnitt punkt, keine Lösung: L = { }

7.6 a) x = 3, y = -1; L = {(3, –1)} b) x = 2, y = 2; L = {(2, 2)} c) x = -1, y = -1; L = {(–1, –1)}

7.7 a) $x = 1,\ y = \frac{1}{4};\ L = \left\{\left(1, \frac{1}{4}\right)\right\}$ b) $r = -1,\ s = \frac{1}{2};\ L = \left\{\left(-1, \frac{1}{2}\right)\right\}$ c) $a = -\frac{1}{2},\ b = -\frac{1}{12};\ L = \left\{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{12}\right)\right\}$

7.8 a) x = 4, y = -2; L = {(4,–2)} b) u = -3, v = -2; L = {(–3,–2)} c) $x = \frac{1}{2},\ y = -\frac{1}{2};\ L = \left\{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\}$

7.9 a)
$a - 4b = 0$
$\underline{2a - 28b = -10}$
$a = 2,\ b = \frac{1}{2};$
$L = \left\{\left(2, \frac{1}{2}\right)\right\}$

b)
$28x + 21 + 48y - 12 = 105$
$\underline{6x + 3 - 4y - 1 = -6}$
$28x + 48y = 96$
$\underline{6x \quad - 4y \quad = -8}$
x = 0; y = 2; L = {(0,2)}

c)
$12v + 15w = 11$
$\underline{24v - 12w + 54w - 18v = 53}$
$12v + 15w = 11$
$\underline{6v + 42w = 53}$
$x = -\frac{37}{46};\ y = \frac{95}{69};\ L = \left\{\left(-\frac{37}{46}, \frac{95}{69}\right)\right\}$

7.10 a)
$6x - 15 = 3y - 12$
$\underline{12x + 12y = 28x - 14y}$
$6x - 3y = 3$
$\underline{-16x + 26y = 0}$
$a = \frac{13}{18},\ b = \frac{4}{9};\ L = \left\{\left(\frac{13}{18}, \frac{4}{9}\right)\right\}$

b)
$6a + 2b - 12a + 3b = a + 8$
$\underline{-4a + 3b = 3a - 9b}$
$-7a + 5b = 8$
$\underline{-7a + 12b = 0}$
$a = -\frac{96}{49},\ b = -\frac{8}{7};\ L = \left\{\left(-\frac{96}{49}, -\frac{8}{7}\right)\right\}$

7.11 a) $8x - 8 + 6y + 6 = 0$
$\underline{4x + 3y + 16x - 8y = 16x - 8y + 1}$
$8x + 6y = 2$
$\underline{4x + 3y = 1}$
$4x + 3y = 1$
$\underline{4x + 3y = 1}$
x beliebig, $y = -\frac{4}{3}\cdot x + \frac{1}{3}$; $L = \left\{(x,y) \mid y = -\frac{4}{3}\cdot x + \frac{1}{3}\right\}$

b) $12y - 6x = 15y + 30 - 10x + 20$
$\underline{2x - 2y + 9y + 6 = 8 + 4x - 8y}$
$4x - 3y = 50$
$\underline{-2x + 15y = 2}$
$x = 14, y = 2$; $L = \{(14, 2)\}$

7.12 a) $3x + 3 - 2y - 4 = 0$
$\underline{8x - 8 + 3y - 6 = 22}$
$3x - 2y = 1$
$\underline{8x + 3y = 36}$
$x = 3, y = 4$; $L = \{(3, 4)\}$

b) $6a + 9 - 5b + 30 = 36$
$\underline{9b + 3 - 4a + 24 = 46}$
$6a - 5b = -3$
$\underline{-4a + 9b = 19}$
$a = 1, b = 3$; $L = \{(2, 3)\}$

c) $6a + 9 - 4b - 24 = 27$
$\underline{-3\cdot(a^2 + 2a + 1) + 6b - 4 = -3a^2 + 11}$
$6a - 4b = -12$
$\underline{-6a + 6b = 18}$
$a = 0, b = 3$; $L = \{(0, 3)\}$

7.13 a) $2u + 2v - 2u - 3v = 3u - v - 10v + 2$
$\underline{2v + 2u + 3v - 3u = -3u - 1}$
$-3u + 10v = 2$
$\underline{2u + 5v = -1}$
$u = -\frac{4}{7}, v = \frac{1}{35}$; $L = \left\{\left(-\frac{4}{7}, \frac{1}{35}\right)\right\}$

b) $10x + 6y + 4 - 15y + 9x - 3 = 4x - 8y$
$\underline{9y + 24x - 21 + 40x - 10y + 5 = 9x - 6y - 12 + 1}$
$15x - y = -1$
$\underline{55x + 5y = 5}$
$x = 0, y = 1$; $L = \{(0, 1)\}$

7.14 a) $x^2 - 2x + 1 + y = x^2 + 2x + 1 - 10$
$\underline{x^2 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + 2x + 1 + y^2}$
$-4x + y = -10$
$\underline{-2x - 2y = 0}$
$x = 2, y = -2$; $L = \{(2, -2)\}$

b) $4x^2 + 4x + 1 + y^2 - 6y + 9 = 4 - 4y + y^2 + 4x^2 + 18$
$\underline{9x^2 + 3x - 20 + 3y = 9x^2 - 2}$
$4x - 2y = 12$
$\underline{3x + 3y = 18}$
$x = 4, y = 2$; $L = \{(4, 2)\}$

7.15 a) $9x^2 - 6x + 1 - 9x^2 - 6x - 1 - 4y + 24 = 8x + 24$
$\underline{x^2 - 1 + 4y^2 - 4y + 4 = 4y^2 + x^2 + 3}$
$-20x - 4y = 0$
$\underline{-4y = 0}$
$x = 0, y = 0$; $L = \{(0, 0)\}$

b) $4u^2 + 4u + 1 - 4u^2 - 4uv - v^2 = -v^2 - 4uv - 4v + 1$
$\underline{u^2 - v^2 - u^2 - 4u - 4 = 3v - v^2 - 4v - 4 - 1}$
$4u + 4v = 0$
$\underline{-4u + v = -1}$
$u = \frac{1}{5}, v = -\frac{1}{5}$; $L = \left\{\left(\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right)\right\}$

7.16 a) $u = \frac{1}{x}, v = \frac{1}{y}$; $x \neq 0, y \neq 0$
$u - v = 0$
$\underline{2u + v = \frac{3}{2}}$
$u = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2$
$v = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2$;
$L = \{(2, 2)\}$

b) $u = \frac{1}{x}, v = \frac{1}{y}$; $x \neq 0, y \neq 0$
$3u + 4v = 4$
$\underline{5u - 8v = 3}$
$u = 1 \Rightarrow x = 1$
$v = \frac{1}{4} \Rightarrow y = 4$;
$L = \{(1, 4)\}$

c) $u = \frac{1}{x}, v = \frac{1}{y}$; $x \neq 0, y \neq 0$
$3u + v = -\frac{5}{2}$
$\underline{4u - 2v = 0}$
$u = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -2$
$v = -1 \Rightarrow y = -1$;
$L = \{(-2, -1)\}$

7.17 a) $v = \frac{1}{y}$; $y \neq 0$
$x + v = 1$
$\underline{2x - 2v = 7}$
$x = 2$; $v = -1 \Rightarrow y = -1$;
$L = \{2, -1)\}$

b) $u = \frac{1}{x}$; $x \neq 0$
$5u + 3y = -11$
$\underline{3u - 4y = 5}$
$u = -1 \Rightarrow x = -1; y = -2$;
$L = \{(-1, -2)\}$

c) $v = \frac{1}{b}$; $b \neq 0$
$5a - 4v = 8$
$\underline{3a + 3v = \frac{15}{2}}$
$a = 2$; $v = \frac{1}{2} \Rightarrow b = 2$;
$L = \{(2, 2)\}$

7.18 a) $u=\frac{1}{a+3}, v=\frac{1}{b-3}$;
$a\neq -3, b\neq 3$

$$u-2v=\frac{11}{6}$$
$$\underline{3u+3v=-\frac{5}{2}}$$
$$v=-\frac{8}{9}\Rightarrow$$
$$b-3=-\frac{9}{8}, b=\frac{15}{8};$$
$$L=\left\{\left(15,\frac{15}{8}\right)\right\}$$

b) $u=\frac{1}{x-2}, v=\frac{1}{4-y}$;
$x\neq 2, y\neq 4$

$$5u+4v=\frac{7}{3}$$
$$\underline{2u-3v=-\frac{7}{3}}$$
$$u=-\frac{1}{3}\Rightarrow$$
$$x-2=-3, x=-1;$$
$$v=1\Rightarrow 4-y=1, y=3;$$
$$L=\{(-1,3)\}$$

c) $u=\frac{1}{6-a}, v=\frac{1}{5-b}$; $a\neq 6, b\neq 5$

$$3u+2v=4$$
$$\underline{6u+4v=8}$$

Die zweite Gleichung entsteht durch Verdopplung der ersten Gleichung; sie ist keine zusätzliche Information und kann daher weggelassen werden.

$2v=4-3u\Rightarrow v=2-\frac{3}{2}u$ oder

$\frac{1}{5-b}=2-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6-a}\Rightarrow b=\frac{3\cdot(6a-31)}{4a-21}$, a beliebig; $L=\left\{(a,b)\,\middle|\, b=\frac{3\cdot(6a-31)}{4a-21}\right\}$

7.19 a)
$$\left.\begin{array}{l}\text{I}: ax-by=a^2+b^2\,|\cdot a\\ \text{II}: bx+ay=a^2+b^2\,|\cdot b\end{array}\right\}+$$
$$a^2x+b^2x=a\cdot(a^2+b^2)+b\cdot(a^2+b^2)$$
$$x\cdot(a^2+b^2)=(a+b)\cdot(a^2+b^2)\;\Rightarrow\; x=a+b$$
$$by=a\cdot(a+b)-(a^2+b^2)\;\Rightarrow\; y=a-b$$

7.19 b) Addition der beiden Gleichungen führt auf
$2a\cdot x+2a\cdot b=0\;\Rightarrow\; x=-b$;
in Gleichung II eingesetzt:
$a\cdot b+b\cdot y=0\Rightarrow y=a$

7.19 c)
$$\left.\begin{array}{l}\text{I}: ax+2by=-ab\,|\\ \text{II}: 2ax-by=3ab\,|\cdot 2\end{array}\right\}+$$
$$5ax=5ab\;\Rightarrow\; x=b$$
$$by=2ab-3ab\;\Rightarrow\; y=-a$$

7.20 a)
$$\left.\begin{array}{l}\text{I}: x-ay=1\,|\\ \text{II}: bx+y=-1\,|\cdot a\end{array}\right\}+$$
$$x+abx=1-a$$
$$x\cdot(1+ab)=1-a\;\Rightarrow\; x=-\frac{a-1}{ab+1}$$
$$y=-1+b\cdot\frac{a-1}{ab+1}\;\Rightarrow\; y=-\frac{b+1}{ab+1}$$

7.20 b)
$$\left.\begin{array}{l}\text{I}: 3x+5y=36b-7a\,|\cdot 3\\ \text{II}: -2x+3y=11a-5b\,|\cdot(-5)\end{array}\right\}+$$
$$19x=-76a+133b\Rightarrow x=-4a+7b$$
$$3y=11a-5b+2\cdot(-4a+7b)\Rightarrow y=a+3b$$

7.20 c)
$$\left.\begin{array}{l}\text{I}: bx+ay=2b\,|\cdot a\\ \text{II}: b^2x-a^2y=a^2+b^2\end{array}\right\}+$$
$$(ab+b^2)\cdot x=a^2+2ab+b^2$$
$$b\cdot(a+b)\cdot x=(a+b)^2\Rightarrow x=\frac{a+b}{b}$$
$$ay=2b-b\cdot\frac{a+b}{b}\;\Rightarrow y=-\frac{a-b}{a}$$

7.21 a)
$$\text{I}: \frac{x}{a+b}+\frac{y}{a}=2b-a\,|\cdot a\cdot(a+b)$$
$$\text{II}: \frac{x}{b}+\frac{y}{a-b}=b\,|\cdot b\cdot(a-b)$$
$$\left.\begin{array}{l}\text{I*}: ax+(a+b)\cdot y=a\cdot(a+b)\cdot(2b-a)\,|\cdot(-b)\\ \text{II*}: (a-b)\cdot x+by=b^2\cdot(a-b)\,|\cdot(a+b)\end{array}\right\}+$$
$$-abx+(a^2-b^2)\cdot x=$$
$$=-ab\cdot(a+b)\cdot(2b-a)+b^2\cdot(a-b)\cdot(a+b)$$
$$x\cdot(a^2-b^2-ab)=$$
$$=b\cdot(a+b)\cdot(-a\cdot(2b-a)+b\cdot(a-b))$$
$$x\cdot(a^2-b^2-ab)=b\cdot(a+b)\cdot(-2ab+a^2+ab-b^2)$$
$$x=b\cdot(a+b)$$
$$\text{I}\Rightarrow\; \frac{y}{a}=2b-a-\frac{b\cdot(a+b)}{a+b};\; y=a\cdot(b-a)$$

7.21 b)
$$\text{I}: b\cdot(x+y)=2ax-2ay$$
$$\text{II}: 2a-5b=3y-2x$$
$$\left.\begin{array}{l}\text{I*}: (-2a+b)\cdot x+(2a+b)\cdot y=0\,|\cdot 3\\ \text{II*}: 2x-3y=-2a+5b\,|\cdot(2a+b)\end{array}\right\}+$$
$$-6ax+3bx+4ax+2bx=$$
$$=(-2a+5b)\cdot(2a+b)$$
$$x\cdot(-2a+5b)=(-2a+5b)\cdot(2a+b)$$
$$x=2a+b$$
$$3y=2a-5b+2\cdot(2a+b)\;\Rightarrow\; y=2a-b$$

7.21 c)

$$\text{I}: \frac{y}{a+b} = 1 - \frac{x}{b-a}$$

$$\text{II}: \frac{x}{a+b} = 1 - \frac{y}{b-a}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{I}^*: \frac{x}{b-a} + \frac{y}{a+b} = 1 \,\Big|\cdot \frac{1}{a-b} \\ \text{II}^*: \frac{x}{a+b} + \frac{y}{b-a} = 1 \,\Big|\cdot \frac{1}{a+b} \end{aligned}\right\} +$$

$$-\frac{x}{(a-b)^2} + \frac{x}{(a+b)^2} = \frac{1}{a-b} + \frac{1}{a+b} \,\Big|\cdot (a-b)^2 \cdot (a+b)^2$$

$$-x \cdot (a+b)^2 + x \cdot (a-b)^2 =$$

$$= (a-b) \cdot (a+b)^2 + (a+b) \cdot (a-b)^2$$

$$x \cdot (-a^2 - 2ab - b^2 + a^2 - 2ab + b^2) =$$

$$= a^3 + a^2 b - a b^2 - b^3 + a^3 - a^2 b - a b^2 + b^3$$

$$-4abx = 2a \cdot (a^2 - b^2); \quad x = -\frac{a^2 - b^2}{2b}$$

$$\frac{y}{a+b} = 1 + \frac{a^2 - b^2}{2b \cdot (b-a)} = 1 - \frac{a+b}{2b}$$

$$y = \frac{2ab + 2b^2 - a^2 - 2ab - b^2}{2b} \Rightarrow y = -\frac{a^2 - b^2}{2b} = x$$

7.22 a)

$$\text{I}: \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = \frac{x}{a-b} + \frac{y}{a+b}$$

$$\text{II}: 1 - \frac{y}{a+b} = \frac{x}{a+b}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{I}^*: (a+b) \cdot x + (a-b) \cdot y = a^2 + b^2 \\ \text{II}^*: x + y = a + b \,|\cdot (b-a) \end{aligned}\right\} +$$

$$ax + bx + bx - ax = a^2 + b^2 + b^2 - a^2$$

$$2bx = 2b^2 \Rightarrow x = b$$

$$\text{II}: 1 - \frac{y}{a+b} = \frac{b}{a+b} \Rightarrow y = a$$

7.22 b)

$$\text{I}: bx - ay = a^2 + b^2$$

$$\text{II}: \frac{bx+ay}{ax-by} = \frac{(b-a)\cdot(a+b)}{2ab}$$

Beseitigen der Nenner in Gleichung II, Ordnen und Herausheben von x und y führt nach Division durch $a^2 + b^2$:

$$\left.\begin{aligned} \text{I}^*: ax + by = 0 \,|\cdot a \\ \text{II}^*: bx - ay = a^2 + b^2 \,|\cdot b \end{aligned}\right\} +$$

$$(a^2 + b^2) \cdot x = b \cdot (a^2 + b^2) \Rightarrow x = b$$

$$\text{I}^* \Rightarrow y = -\frac{a \cdot x}{b} = -\frac{a \cdot b}{b} = -a$$

7.23 (1) a) $D = \begin{vmatrix} 2 & 1/2 \\ -1 & -1/4 \end{vmatrix} = 0,\ D_x = \begin{vmatrix} -1 & 1/2 \\ 1/2 & -1/4 \end{vmatrix} = 0,\ D_y = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1/2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ unendlich viele Lösungen

b) $L = \{(x;y) \mid y = -4x - 2\}$

(2) a) $D = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -9/2 & -6 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ eindeutige Lösung b) $L = \{(2, -1/3)\}$

(3) a) $D = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ eindeutige Lösung b) $L = \{(-2{,}5; 0)\}$

(4) a) $D = \begin{vmatrix} 0{,}5 & -2{,}5 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ eindeutige Lösung b) $L = \{(6, 0)\}$

(5) a) $D = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -2{,}5 & -3 \end{vmatrix} = 0,\ D_x = \begin{vmatrix} 5 & 1/2 \\ -2{,}5 & -1/4 \end{vmatrix} = 0,\ D_y = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2{,}5 & -3{,}5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ unendlich viele Lösungen

b) $L = \left\{(x, y) \mid y = -\frac{5}{6}x + \frac{7}{6}\right\}$

(6) a) $D = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1 & 1/6 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ eindeutige Lösung b) $L = \{(0{,}5; 0)\}$

7.24 (1) a) $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & s \end{vmatrix} = 1 \cdot s - 3 \cdot 2 = 0 \Rightarrow s = 6;\ D_x = \begin{vmatrix} r & 2 \\ 2 & s \end{vmatrix} = r \cdot s - 4 = 6r - 4 \neq 0 \Rightarrow r \neq \frac{2}{3}$

b) $D \neq 0 \Rightarrow s \neq 6$, r beliebig c) $D = D_x = D_y = 0 \Rightarrow s = 6$ und $r = \frac{2}{3}$

(2) a) $D = 4 \cdot r + 8 = 0 \Rightarrow r = -2;\ D_y = r \cdot s - 12 = -2s - 12 \neq 0$ oder $s \neq -6$

b) $D \neq 0 \Rightarrow r \neq -2$, s beliebig c) $D = D_y = 0\ (= D_x) \Rightarrow r = -2, s = -6$

(3) a) $D = 7 \cdot r - 8 \cdot s = 0 \Rightarrow r = \frac{8}{7} \cdot s;\ D_y = 4 \cdot r - 40 \neq 0 \Rightarrow r \neq 10$

b) $D \neq 0 \Rightarrow r \neq \frac{8}{7} \cdot s$ c) $D = D_y = 0\ (= D_x) \Rightarrow r = \frac{8}{7} \cdot s,\ r = 10$ (und damit $s = \frac{35}{4}$)

7.25 (1) a) $D = \begin{vmatrix} 4 & a \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 8a = 0 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$

b) $D_x = \begin{vmatrix} 2 & a \\ b & 5 \end{vmatrix} = 10 - a \cdot b = 10 - -\frac{5}{2} \cdot b$; $D_y = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 8 & b \end{vmatrix} = 4b - 16$; Lösungsmenge leer, wenn $b \neq 4$ (D_x, $D_y \neq 0$); Lösungsmenge unendlich, wenn $b = 4$ (D_x, $D_y = 0$)

(2) a) $D = -2a - \frac{1}{8} = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{16}$

b) $D_x = \frac{b}{4} - 1$, $D_y = -\frac{1}{4} - a \cdot b = -\frac{1}{4} + \cdot \frac{1}{16} \cdot b$; Lösungsmenge leer, wenn $b \neq 4$ (D_x, $D_y \neq 0$); Lösungsmenge unendlich, wenn $b = 4$ (D_x, $D_y = 0$)

(3) a) $D = 2a + 3 = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$

b) $D_x = 2a - 3b = -3 - 3b$; $D_y = 2b + 2$; Lösungsmenge leer, wenn $b \neq -1$ (D_x, $D_y \neq 0$); Lösungsmenge unendlich, wenn $b = -1$ (D_x, $D_y = 0$)

(4) a) $D = 20 + 2a = 0 \Rightarrow a = -10$

b) $D_x = 5b + 1$, $D_y = 2 - a \cdot b = 2 + 10 \cdot b$; Lösungsmenge leer, wenn $b \neq -\frac{1}{5}$ (D_x, $D_y \neq 0$);

Lösungsmenge unendlich, wenn $b = -\frac{1}{5}$ (D_x, $D_y = 0$)

7.26 $a : b = 3 : 1$; $a = 3k$, $b = k$; $2 \cdot 3k + 2 \cdot k = 32 \Rightarrow k = 4$; $a = 12$ cm, $b = 4$ cm

7.27 Schenkel: x, Basis: x + 4; $2x + (x+4) = 28 \Rightarrow$ Schenkel x = 8 cm, Basis = 12 cm

7.28 a) Ein Punkt liegt auf einer Geraden, wenn seine Koordinaten die Geradengleichung $y = k \cdot x + d$ erfüllen:

P(3/10): I: $10 = k \cdot 3 + d$

Q(-9/-2): $\underline{\text{II: } -2 = k \cdot (-9) + d}$

$\Rightarrow k = 1, d = 7$; Normalform; $y = x + 7$; allgemeine Form: $x - y + 7 = 0$

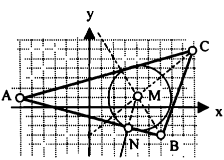
b) $\tan \alpha = k \Rightarrow \alpha = 45°$

7.29 a Länge, b Breite;

I: $a - 3 = b + 1$

$\underline{\text{II: } 4 \cdot (a-3) = 20}$ $\Rightarrow a = 8$ cm, $b = 4$ cm

7.30 a) x, y Koordinaten des Inkreismittelpunktes M;



I: $2x + y = 9$

$\underline{\text{II: } x - y = 3}$ $\Rightarrow x = 4, y = 1$, M(4/1);

b) Gerade g: $y = k \cdot x + d$ durch A und B;

I: $1 = k \cdot (-6) + d$

$\underline{\text{II: } -3 = k \cdot 6 + d}$ $\Rightarrow k = -\frac{1}{3}, d = -1$; $y = -\frac{1}{3} \cdot x - 1$;

Normale n durch M: $k_n = -\frac{1}{k} = 3$ (siehe Aufgabe 5.14, Lehrbuch Seite 183);

$y = 3x + d_n$; $1 = 3 \cdot 4 + d \Rightarrow d = -11$; $y = 3x - 11$;

Schnitt n mit g: $3x - 11 = -\frac{1}{3} \cdot x - 1 \Rightarrow x = 3$; $y = 3 \cdot 3 - 11 = -2$; N(3/-2);

Inkreisradius $\rho = \overline{MN} = \sqrt{(4-3)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{10} \approx 3{,}16$

7.31 a) Rechtwinkliges Dreieck: Da A und B gleiche y-Koordinaten haben, verläuft die Seite c parallel zur x-Achse.

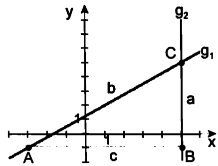
b) Dritter Punkt C als Schnittpunkt g_1 mit g_2 :

I: $4y - 3x = 5$

II: $x = 5$ $\Rightarrow$ $y = 5$; C(5/5)

c) $c = 5 - (-3) = 8$; $a = 5 - (-1) = 6$; $b = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$;

Umfang $u = a + b + c = 24$; Flächeninhalt $A = \frac{c \cdot a}{2} = 24$



7.32 a) Schnitt g_1 mit g_2:

I: $2y + x = -4$

II: $3y + x = 24$

$\Rightarrow$ $x = -60$, $y = 28$; A(-60/28)

Schnitt g_1 mit g_3:

I: $2y + x = -4$

II: $y = 2x + 3$

$\Rightarrow$ $x = -2$, $y = -1$; B(-2/-1)

Schnitt g_2 mit g_3:

I: $3y + x = 24$

II: $y = 2x + 3$

$\Rightarrow$ $x = 15/7$, $y = 51/7$; $C\left(\frac{15}{7}/\frac{51}{7}\right)$

b) $c = \overline{AB} = \sqrt{(-2+60)^2 + (-1-28)^2} = 64{,}85$; $a = \overline{BC} = \sqrt{(15/7+2)^2 + (51/7+1)^2} = 9{,}26$;

$b = \overline{AC} = \sqrt{(15/7+60)^2 + (51/7-28)^2} = 65{,}50$; Umfang $u = a + b + c = 139{,}6$;

$s = u/2$; Flächeninhalt $A = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)} = 300{,}4$

7.33 a) Gerade g durch A und B:

I: $1 = k \cdot (-7) + d$

II: $4 = k \cdot 8 + d$

$k = \frac{1}{5}$, $d = \frac{12}{5}$; $y = \frac{1}{5} \cdot x + \frac{12}{5}$

Gerade durch A und C:

I: $1 = k \cdot (-7) + d$

II: $7 = k \cdot 5 + d$

$k = \frac{1}{2}$, $d = \frac{9}{2}$; $y = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{9}{2}$

Gerade durch B und C:

I: $4 = k \cdot 8 + d$

II: $7 = k \cdot 5 + d$

$k = -1$, $d = 12$; $y = -x + 12$

b) Umkreismittelpunkt M als Schnittpunkt der Streckensymmetralen etwa von AB und AC

$M_1\left(\frac{1}{2}/\frac{5}{2}\right)$ Mittelpunkt der Strecke AB;

$M_2(-1/4)$ Mittelpunkt der Strecke AC;

Streckensymmetrale von AB = Normale durch M_1:

$k = -\frac{1}{1/5} = -5$; $\frac{5}{2} = -5 \cdot \frac{1}{2} + d$ $\Rightarrow$ $d = 5$; m_1: $y = -5x + 5$;

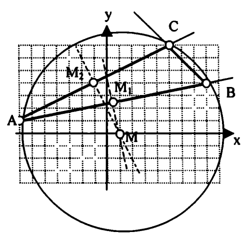
Streckensymmetrale von AC = Normale durch M_2:

$k = -\frac{1}{1/2} = -2$; $4 = -2 \cdot (-1) + d$ $\Rightarrow$ $d = 2$; m_2: $y = -2x + 2$;

Schnitt m_1 mit m_2:

I: $y = -5x + 5$

II: $y = -2x + 2$ $\Rightarrow$ $x = 1$, $y = 0$; M(1/0);



7.34 a) I: $y = -2x + 8$

II: $y = -x/2 - 4$ $\Rightarrow$ $x = 8$, $y = -8$; B(8/-8)

b) Höhenlinie h_1 = Normale auf die Strecke BC durch A:

$k_{BC} = \frac{4-(-8)}{2-8} = -2$; $k_n = -\frac{1}{k_{BC}} = \frac{1}{2}$;

$-2 = \frac{1}{2} \cdot (-4) + d$ $\Rightarrow$ $d = 0$; h_1: $y = \frac{1}{2} \cdot x$;

Höhenlinie h_2 = Normale auf die Strecke AB durch C:

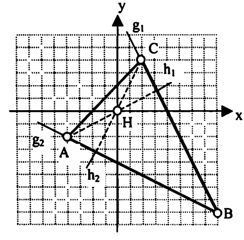
$k_{AB} = \frac{-8-(-2)}{8-(-4)} = -\frac{1}{2}$; $k_n = -\frac{1}{k_{AB}} = 2$;

$4 = 2 \cdot 2 + d$ $\Rightarrow$ $d = 0$; h_1: $y = 2 \cdot x$;

Schnitt h_1 mit h_2:

I: $y = \frac{1}{2} \cdot x$

II: $y = 2x$ $\Rightarrow$ $x = 0$, $y = 0$; Höhenschnittpunkt H(0/0)



7.35 a) Schnitt g_1 mit g_3:
I: $x + 8y = 12$
II: $\underline{7y - x = 18}$
$\Rightarrow x = -4, y = 2$; A(-4/2)

Schnitt g_1 mit g_2:
I: $x + 8y = 12$
II: $\underline{y = -2x + 9}$
$\Rightarrow x = 4, y = 1$; B(4/1)

Schnitt g_2 mit g_3:
I: $y = -2x + 9$
II: $\underline{7y - x = 18}$
$\Rightarrow x = 3, y = 3$; C(3/3)

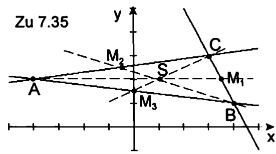
b) $M_1(3{,}5/2)$ Mittelpunkt der Strecke BC;
s_A Schwerlinie durch M_1 u. A:
I: $2 = k \cdot 3{,}5 + d$
II: $\underline{2 = k \cdot (-4) + d} \Rightarrow$
$k = 0,\ d = 2$; s_A: $y = 2$

$M_2(-0{,}5/2{,}5)$ Mittelpunkt der Strecke AC;
s_B Schwerlinie durch M_2 u. B:
I: $2{,}5 = k \cdot (-0{,}5) + d$
II: $\underline{1 = k \cdot 4 + d} \Rightarrow$
$k = -\frac{1}{3},\ d = \frac{7}{3}$; s_B: $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

$M_3(0/1{,}5)$ Mittelpunkt der Strecke AB;
s_C Schwerlinie durch M_3 u. C:
I: $1{,}5 = k \cdot 0 + d$
II: $\underline{3 = k \cdot 3 + d} \Rightarrow$
$k = \frac{1}{2},\ d = \frac{3}{2}$; s_C: $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

Schwerpunkt S ist der Schnittpunkt zweier Schwerlinien:
I: $y = 2$
II: $\underline{y = -x/3 + 7/3} \Rightarrow x = 1, y = 2$; S(1/2)

Zu 7.35



7.36 I: $F_1 + F_2 = 1800$
II: $\underline{F_1 - F_2 = 200}$
$\Rightarrow F_1 = 1000$ N, $F_2 = 800$ N

7.37 m_1 kleinere, m_2 größere Masse
I: $m_1 + 30 = m_2$
II: $\frac{120}{m_1} = \frac{300}{m_2}$
$\Rightarrow m_1 = 20$ kg, $m_2 = 50$ kg; $a = 120/20 = 6\ \text{ms}^{-2}$

7.38 U, R ursprüngliche Werte;
I: $\frac{U+10}{R-5} = 6$
II: $\frac{U-20}{R+10} = 2$
$U = 80$ V, $R = 20\ \Omega$

7.39 x Anzahl der höheren, y Anzahl der niedrigeren Qualität
I: $x + y = 1000$
II: $\underline{150 \cdot x + 100 \cdot y = 120\,000}$
$x = 400$; $y = 600$

7.40 x Anzahl der 100-€-Scheine, y Anzahl der 50-€-Scheine;
I: $x + y = 70$
II: $\underline{100x + 50y = 5000}$
$x = 30, y = 40$

7.41 $K = k \cdot x + d$, k (variable) Kosten pro Stück, unabhängig von den Fixkosten d;
I: $k \cdot 20 + d = 70\,000$
II: $\underline{k \cdot 80 + d = 130\,000}$
$\Rightarrow k =$ € 1000 pro Stück, $d =$ € 50 000

7.42 1. Abteilung produziert x Stück/Tag
2. Abteilung produziert y Stück/Tag;
I: $x + y = 150$
II: $\underline{5x + 10y = 1200}$
$x = 60$ Stück/Tag, $y = 90$ Stück/Tag; 1. Abteilung produziert 300, 2. Abteilung 900 Stück

7.43 x Masse des Körpers A, y Masse des Körpers B;
I: $\frac{3}{5} \cdot x + 334 = \frac{5}{8} \cdot y$
II: $\frac{5}{8} \cdot x - 49 = \frac{1}{5} \cdot y$
$\Rightarrow x = 360$ kg, $y = 880$ kg

7.44 p_1 Preis des Produktes P_1, p_2 Preis von P_2;
I: $1{,}2 \cdot p_1 + 1{,}3 \cdot p_2 = 3700$
II: $\underline{(1{,}2)^2 \cdot p_1 + (1{,}3)^2 \cdot p_2 = 4570}$
$p_1 = 2000$ €, $p_2 = 1000$ €

7.45 d Grundgebühr, k Gesprächsgebühr pro Minute
I: $500 \cdot k + d = 235{,}24$
II: $\underline{800 \cdot k + d = 347{,}44}$
$\Rightarrow k = 0{,}374$ €/min; $d = 48{,}24$ €

7.46 a) a Anschaffungswert, d jährliche Abschreibung;
I: $a - 2 \cdot d = 60\,000$
II: $\underline{a - 4 \cdot d = 20\,000}$
$\Rightarrow a = 100\,000$ €, $d = 20\,000$ €
b) $a - 5d = 0$, Nutzungsdauer 5 Jahre

7.47 1. Spiritussorte ist x-prozentig, die 2. Sorte y-prozentig;

$\text{I}:\ 12\cdot\frac{x}{100}+8\cdot\frac{y}{100}=20\cdot\frac{48}{100}$ reiner Alkohol von 12 l der 1.Sorte + reiner Alkohol von 8 l der 2.Sorte = reiner Alkohol von 20 l Mischung

$\text{II}:\ 12\cdot\frac{x}{100}+8\cdot\frac{0}{100}=20\cdot\frac{36}{100}$ reiner Alkohol von 12 l der 1.Sorte = reiner Alkohol von 20 l Mischung (8 l Wasser enthalten keinen Alkohol)

$\Rightarrow$ x = 60, y = 30; die 1. Sorte ist 60%-ig, die 2. Sorte 30%-ig.

7.48 m_1, m_2 Massen der beiden Metalle;

I: $m_1 + m_2 = 1210$

II: $m_1 : m_2 = 9 : 2$

$\Rightarrow m_1 = 990$ kg, $m_2 = 220$ kg

7.49 x ml 20%-iger Alkohol, y ml 45%-iger Alkohol;

I: $x + y = 500$

II: $0{,}2\cdot x + 0{,}45\cdot y = 0{,}35\cdot 500$

x = 200 ml, y = 300 ml

7.50 1. Salzlösung x-prozentig, 2. Salzlösung y-prozentig;

$\text{I}:\ 6\cdot\frac{x}{100}+4\cdot\frac{y}{100}=10\cdot\frac{52}{100}$

$\text{II}:\ 4\cdot\frac{x}{100}+5\cdot\frac{y}{100}=9\cdot\frac{45}{100}$

$\Rightarrow$ x = 70, y = 25; 1. Lösung 70%-ig, 2. Lösung 25%-ig.

7.51 x kg 20%-ige Lösung, y kg 45%-ige Lösung;

I: $x + y = 25$

II: $0{,}2\cdot x + 0{,}45\cdot y = 0{,}35\cdot 25$

x = 10 kg, y = 15 kg

7.52 x Masse des Cu-Anteils, y Masse des Zn-Anteils; Volumen des Würfels: $V = 1{,}5^3 = 3{,}375\ \text{dm}^3$;

I: $x + y = 28{,}86$

$\text{II}:\ \frac{x}{8{,}93}+\frac{y}{7{,}14}=3{,}375$

$\Rightarrow$ x = 23,76 kg, y = 5,10 kg

7.53 x Masse des Cu-Anteils, y Masse des Sn-Anteils; Volumen der Platte: $V = 30\cdot 20\cdot 0{,}5 = 300\ \text{dm}^3$;

a) I: $x + y = 2649$

$\text{II}:\ \frac{x}{8{,}93}+\frac{y}{7{,}20}=300$

$\Rightarrow$ x = 2524 kg, y = 125 kg

b) $\frac{2524}{2649}=0{,}953=95{,}3\%$; Legierung mit 95,3% Cu

7.54 x Masse des Cu-Anteils, y Masse des Zn-Anteils; Volumen des Blechs: $V = 392\cdot 0{,}01 = 3{,}92\ \text{dm}^3$;

I: $x + y = 33{,}5$

$\text{II}:\ \frac{x}{8{,}93}+\frac{y}{7{,}14}=3{,}92$ $\Rightarrow$ x = 27,5 kg; y = 6,0 kg

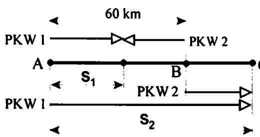
7.55 a) x Geschwindigkeit PKW1, y von PKW2;

$\text{I}:\ \frac{3}{7}x+\frac{3}{7}y=60$

II: $3x - 3y = 60$ $\Rightarrow$ x = 80 km/h, y = 60 km/h

b) Begegnung: $60 - \frac{3}{7}\cdot 80 \approx 25{,}7$ km von B entfernt

Überholung: $3\cdot 60 = 180$ km von B entfernt



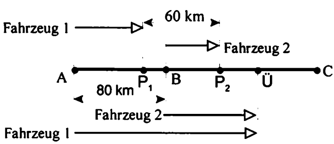
7.56 a) x Geschwindigkeit des Fahrzeuges aus A, y Geschwindigkeit des Fahrzeuges aus B;

I: $1{,}5\cdot x + 60 = 80 + 1{,}4\cdot y$

II: $7{,}5\cdot x = 80 + 7{,}4\cdot y$

x = 60 km/h, y = 50 km/h

b) $7{,}5\cdot 60 = 450$ km; der Überholvorgang findet 450 km von A oder 370 km von B entfernt statt.



7.57 a) x Geschwindigkeit PKW1, y Geschwindigkeit PKW2;

(1) I: $0{,}75\cdot x + 15 + 0{,}75\cdot y = 150$

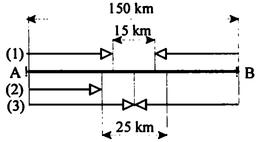
(2) $\underline{\text{II: } 0{,}75\cdot 1{,}25\cdot x + 25 + 0{,}5\cdot y = 150}$

$\Rightarrow x = 80$ km/h, $y = 100$ km/h

b) t Fahrzeit in h bis zur Begegnung;

(3) $80\cdot t + 100\cdot t = 150 \Rightarrow t = \frac{5}{6}$ h;

$80\cdot\frac{5}{6} \approx 66{,}7$ km; Begegnung 66,7 km von A entfernt

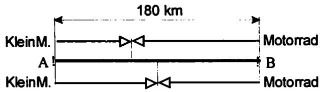


7.58 x Geschwindigkeit des Kleinmotorrads,
y Geschwindigkeit des Motorrads;

I: $1{,}2\cdot x + 1{,}2\cdot y = 180$

$\underline{\text{II: } 1{,}2\cdot 1{,}25\cdot x + 1\cdot y = 180}$

$\Rightarrow x = 60$ km/h, $y = 90$ km/h



7.59 a) 1. Mischer leistet pro Minute x m^3,
2. Mischer pro Minute y m^3;

I: $30\cdot x + 40\cdot y = 36$

$\underline{\text{II: } 40\cdot x + 30\cdot y = 34}$

$\Rightarrow x = 0{,}4\ m^3, y = 0{,}6\ m^3$

b) t Zeit, wenn beide Mischer zusammen;

$0{,}4\cdot t + 0{,}6\cdot t = 600 \Rightarrow t = 600$ min = 10 h

7.60 a) 1. Abfluss x *l* pro Minute, 2. Abfluss y *l* pro Minute;

I: $3x + 10y = 350$

$\underline{\text{II: } 5x + 5y = 350}$

$\Rightarrow x = 50\ l, y = 20\ l$

b) Beide Abflüsse, gleichzeitig geöffnet, leeren nach t Minuten;

$50\cdot t + 20\cdot t = 700 \Rightarrow t = 10$ min

7.61 1. Rohr füllt allein in x Minuten, 2. Rohr füllt allein in y Minuten;

I: $\frac{6}{x} + \frac{6}{y} = \frac{1}{2}$

$\underline{\text{II: } \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{1}{5}}$

$\Rightarrow x = 30$ min, $y = 20$ min;
Volumenströme verhalten sich wie 3 : 2

7.62 a) I: $F_A - 50 + F_B = 0$

$\underline{\text{II: } -100 + 8\ F_B = 0}$

$\Rightarrow F_A = 37{,}5$ kN; $F_B = 12{,}5$ kN

b) I: $F_A - 20 - 20 + F_B = 0$

$\underline{\text{II: } -20 - 20\cdot 2 + 3\cdot F_B = 0}$

$\Rightarrow F_A = 20$ kN; $F_B = 20$ kN

c) I: $F_A - 10 - 20 - 10 + F_B = 0$

$\underline{\text{II: } -10\cdot 2 - 20\cdot 6 - 10\cdot 8 + 10\ F_B = 0}$

$\Rightarrow F_A = 18$ kN; $F_B = 22$ kN

d) I: $F_A - 10 - 10 - 20 - 10 + F_B = 0$

$\underline{\text{II: } -10\cdot 1 - 10\ 2 - 20\cdot 3 - 10\cdot 4 + F_B\cdot 5 = 0}$

$\Rightarrow F_A = 24$ kN; $F_B = 26$ kN

7.63 b) I: $3x - 7y + 8z = 4$

II: $x + y - 3z = -1$

$\underline{\text{III: } 2x + 3y - 9z = -4}$

II $\Rightarrow x = 3z - y - 1$; in I und III einsetzen:

I*: $-10y + 17z = 7$

$\underline{\text{III*: } y - 3z = -2}$

$\Rightarrow y = 1, z = 1$;
$x = 3z - y - 1 = 1$;
$L = \{ (1, 1, 1) \}$

Lösung mit *Gauß'schem Eliminationsverfahren*:

I: $3x - 7y + 8z = 4$

II: $x + y - 3z = -1 \ |\cdot(-3)$

$\underline{\text{III: } 2x + 3y - 9z = -4} \ |\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)$

I + (-3)·II ergibt II*

I + $\left(-\frac{3}{2}\right)$·III ergibt III*:

I: $3x - 7y + 8z = 4$

II* $-10y + 17z = 7$

$\underline{\text{III*: } -\frac{23}{2}y + \frac{43}{2}z = 10 \ |\cdot -\frac{20}{23}}$

II* + $\left(-\frac{20}{23}\right)$·III* ergibt III**:

I: $3x - 7y + 8z = 4$

II*: $-10y + 17z = 7$

$\underline{\text{III**: } z = 1}$

Rückwärtseinsetzen zuerst in II*, dann in I:

$-10\cdot y + 17\cdot 1 = 7 \Rightarrow y = 1$

$3x - 7\cdot 1 + 8\cdot 1 = 4 \Rightarrow x = 1$;

$L = \{ (1, 1, 1) \}$

7.63 b) I: $2a + b + c = 7$
II: $4a - 3b - 2c = 2$
<u>III: $3a - 3b + 5c = 21$</u>

I $\Rightarrow$ $c = 7 - 2a - b$; in II und III einsetzen:
II*: $8a \quad - b = 16$
<u>III*: $7a + 8b = 14$</u>

$\Rightarrow a = 2, b = 0;$
$c = 7 - 2a - b = 3;$
$L = \{ (2, 0, 3) \}$

Lösung mit *Gauß'schem Eliminationsverfahren*:

I: $2a + b + c = 7 \,|\cdot(-2)$
II: $4a - 3b - 2c = 2$
<u>III: $3a - 3b + 5c = 21 \,|\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$</u>
I + (-2)·II ergibt II*
I + $\left(-\frac{2}{3}\right)$·III ergibt III*:

I: $2a + b + c = 7$
II*: $b - 4c = -12 \,|(-9)$
<u>III*: $9b - 7c = -21$</u>
(-9)·II* + III* ergibt III**:

I: $2a + b + c = 7$
II*: $b - 4c = -12$
<u>III**: $c = 3$</u>
Rückwärtseinsetzen zuerst in II*, dann in I:
$b - 4\cdot 3 = -12 \Rightarrow b = 0$
$2a + 0 + 3 = 7 \Rightarrow a = 2;$
$L = \{ (2, 0, 3) \}$

7.64 a) I: $5x - y + z = 22$
II: $3x \quad + 2z = 14$
<u>III: $2y - 3z = -5$</u>

I $\Rightarrow$ $z = 22 - 5x + y$; in II und III einsetzen:
II*: $7x - 2y = 30$
<u>III*: $15x - y = 61$</u>

$\Rightarrow x = 4, y = -1;$
$z = 22 - 5\cdot 4 + (-1) = 1;$
$L = \{ (4, -1, 1) \}$

Lösung mit *Gauß'schem Eliminationsverfahren*:

I: $5x - y + z = 22$
II: $3x \quad + 2z = 14 \,|\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)$
<u>III: $2y - 3z = -5$</u>
I + $\left(-\frac{5}{3}\right)$·II ergibt II*

I: $5x - y + z = 22$
II*: $3y + 7z = 4$
<u>III: $2y - 3z = -5 \,|\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)$</u>
II* + $\left(-\frac{3}{2}\right)$·III ergibt III*:

I: $5x - y + z = 22$
II*: $3y + 7z = 4$
<u>III*: $z = 1$</u>
Rückwärtseinsetzen zuerst in II*, dann in I:
$3y + 7\cdot 1 = 4 \Rightarrow y = -1$
$5x - (-1) + 1 = 22 \Rightarrow x = 4$
$L = \{ (4, -1, 1) \}$

b) I: $3k + 4l + 5m = -3$
II: $2k - 3l - 2m = -2$
<u>III: $-8k + 7l - m = 8$</u>

III $\Rightarrow$ $m = -8k + 7l - 8$; in I und II einsetzen:
I*: $-37k + 39l = 37$
<u>II*: $18k - 17l = -18$</u>

$\Rightarrow k = -1, l = 0;$
$m = -8\cdot(-1) + 7\cdot 0 - 8 = 0;$
$L = \{ (-1, 0, 0) \}$

7.65 a) I: $3a - 2b + c = 2$
II: $4a + 2b - 3c = -11$
<u>III: $6a - 2b + 2c = 0$</u>

I $\Rightarrow$ $c = -3a + 2b + 2$; in II und III einsetzen:
II*: $13a - 4b = -5$
<u>III*: $2b = -4$</u>

$\Rightarrow a = -1, b = -2;$
$c = -3\cdot(-1) + 2\cdot(-2) + 2 = 1;$
$L = \{ (-1, -2, 1) \}$

b) Angabe!!
I: $4u - v - w = 12$
II: $u + 2v - 3w = -7$
<u>III: $2u + 3v - w = -2$</u>

I $\Rightarrow$ $v = 4u - w - 12$; in in II und III einsetzen:
II*: $9u - 5w = 17$
<u>III*: $14u - 4w = 34$</u>

$\Rightarrow u = 3, w = 2;$
$v = 4\cdot 3 - 2 - 12 = -2;$
$L = \{ (3, -2, 2) \}$

7.66 a) I: $-3x + 2y - z = 2$
II: $4x - 3y + 2z = -3$
<u>III: $2x + y + 3z = -6$</u>

I $\Rightarrow$ $z = -3x + 2y - 2$; in II und III einsetzen:
II*: $-2x + y = 1$
<u>III*: $-x + y = 0$</u>

$\Rightarrow x = -1, y = -1;$
$z = -3\cdot(-1) + 2\cdot(-1) - 2 = -1-$
$L = \{ (-1, -1, -1) \}$

b) I: $7u + 3v - 3w = -18$
II: $2v + 4w = 6$
<u>III: $u + v \quad + w = 0$</u>

III $\Rightarrow$ $u = -v - w$; in I einsetzen:
I*: $2v + 5w = 9$
<u>II: $2v + 4w = 6$</u>

$\Rightarrow v = -3, w = 3;$
$u = -(-3) - 3 = 0;$
$L = \{ (0, -3, 3) \}$

7.67 a) $u = \frac{1}{x}, v = \frac{1}{y}, w = \frac{1}{z};\ x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0;$

I: $u \quad + v - 2w = 1$
II: $3u + 4v + w = 15/2$
<u>III: $2u - 3v - 4w = -3$</u>
$\Rightarrow u = 1, v = 1, w = \frac{1}{2}$

$u = \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x = 1; \quad v = \frac{1}{y} = 1 \Rightarrow y = 1;$
$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \Rightarrow z = 2;$
$L = \{(1, 1, 2)\}$

7.67 b) $u=\frac{1}{a+1}, v=\frac{1}{b-2}, w=\frac{1}{c+4}$; $a\neq -1, b\neq 2, c\neq -4$

I: $u+v-w=1$
II: $2u-3v+2w=-3$
III: $3u-2v+w=-2/3$

I: $u=1-v+w$; in II und III einsetzen:
II*: $5v-4w=5$
III*: $5v-4w=11/3$
II* - III*: $0=4/3$; keine Lösung für u, v und w! Daher auch keine Lösung für a, b und c.

7.68 a) $x=\frac{1}{u}, y=\frac{1}{v}, z=\frac{1}{w}$; $\frac{1}{u}=2\Rightarrow u=\frac{1}{2}$; $\frac{1}{v}=3\Rightarrow v=\frac{1}{3}$; $\frac{1}{w}=4\Rightarrow w=\frac{1}{4}$

I: $x+z=6$
II: $y-3z=-9$
III: $2x+y=7$
$\Rightarrow x=2, y=3, z=4$

b) $u=\frac{1}{x+1}, v=\frac{1}{y+1}, w=\frac{1}{z+2}$;

I: $2u-w=3/4$
II: $v-2w=1/2$
III: $3u+3v=9/2$
$u=1/2, v=1, w=1/4$

$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}\Rightarrow x=1$; $\frac{1}{y+1}=1\Rightarrow y=0$; $\frac{1}{z+2}=\frac{1}{4}\Rightarrow z=2$

7.69 a) $u=x, v=\frac{1}{y+1}, w=\frac{1}{z}$; $y\neq -1, z\neq 0$;

I: $u-3v+w=-5/3$
II: $4u+2v-3w=-13/3$
III: $-2u+v+2w=3$
$\Rightarrow u=-1, v=\frac{1}{3}, w=\frac{1}{3}$;

$u=x=-1$;
$v=\frac{1}{y+1}=\frac{1}{3}\Rightarrow y=2$;
$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{3}\Rightarrow z=3$

b) $u=\frac{1}{x+1}, v=y; w=\frac{1}{z-1}$; $x\neq -1, z\neq 1$

I: $u+3v-w=7$
II: $3u-4v+3w=-8$
III: $-u+v-2w=5/2$
$\Rightarrow u=\frac{1}{2}, v=2, w=-\frac{1}{2}$;

$u=\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}\Rightarrow x=1$;
$v=y=2$;
$w=\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{2}\Rightarrow z=-1$

7.70 a) I*: $(a+2):(b+3)=1:1$
II*: $(a+2):(c+5)=1:2$
III*: $3a-4b+2c=8$
$\Rightarrow a=2, b=1, c=3$

b) I: $(u+v):(u-v):(v-w)=2:1:5$
II: $3u+2v-4w=47$

I*: $(u+v):(u-v)=2:1$
II* $(u-v):(v-w)=1:5$
III*: $3u+2v-4w=47$
$\Rightarrow u=3, v=1, w=-9$

7.71 a) $u=\frac{1}{x+2}, v=\frac{1}{y+2}, w=\frac{1}{4+z}$; $x\neq -2, y\neq -2, z\neq -4$

I*: $u:(2v)=4:8$
II*: $u:(3w)=4:3$
III*: $3u-4w=2$
$\Rightarrow u=1, v=1, w=\frac{1}{4}$;

$u=\frac{1}{x+2}=1\Rightarrow x=-1$; $v=\frac{1}{y+2}=1\Rightarrow y=1$
$w=\frac{1}{4+z}=\frac{1}{4}\Rightarrow z=0$

b) $u=\frac{1}{a+1}, v=\frac{1}{b+3}, w=\frac{1}{c+4}$; $a\neq -1, b\neq -3, c\neq -4$

I*: $u:v=1:1$
II*: $u:(2w)=1:6$
III*: $2u-3v-3w=-5/3$
$\Rightarrow u=\frac{1}{6}, v=\frac{1}{6}, w=\frac{1}{2}$;

$u=\frac{1}{a+1}=\frac{1}{6}\Rightarrow a=5$; $v=\frac{1}{b+3}=\frac{1}{6}\Rightarrow b=3$;
$w=\frac{1}{c+4}=\frac{1}{2}\Rightarrow c=-2$

7.72 a) Angabe: $A_{erw}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 12 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

I: $2x+3y-4z=12$
II: $-3x+2y+z=0$
III: $4x-2y-z=1$
$\Rightarrow x=1, y=2, z=-1$; $L=\{(1,2,-1)\}$

b) Angabe: $A_{erw}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 4 & 3 & 18 \end{pmatrix}$

I: $3x-y+z=2$
II: $5x+2y-z=9$
III: $4y+3z=18$
$\Rightarrow x=1, y=3, z=2$; $L=\{(1,3,2)\}$

7.73 (1) a) $D=\begin{vmatrix} 3 & a & 2 \\ -6 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=18+0-12-(0-6-12a)=12a+12\neq 0\Rightarrow a\neq -1$; b beliebig

b) $D=0$, d.h. $a=-1$, und zugleich $D_x=\begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -9 & 3 & -2 \\ b & 1 & 2 \end{vmatrix}=4\cdot(1-b)\neq 0$, d.h. $b\neq 1$; auch D_y und D_z sind $\neq 0$ bei $b\neq 1$

c) $D=D_x=D_y=0\Rightarrow a=-1$ und zugleich $b=1$

7.73 (2) a) $D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -10 \\ 0 & -1 & a \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot(3-a) \neq 0 \Rightarrow a \neq 3$; b beliebig

b) D = 0, d.h. a = 3, und zugleich $D_x = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -10 \\ -2 & -1 & -3 \\ b & 0 & 2 \end{vmatrix} = -16b \neq 0$, d.h. $b \neq 0$; auch D_y und D_z sind $\neq 0$ bei $b \neq 0$

c) $D = D_x = D_y = 0 \Rightarrow a = 3$ und zugleich b = 0

(3) a) $D = 14\cdot(3a+2) \neq 0 \Rightarrow a \neq -\frac{2}{3}$, b beliebig

b) D = 0, d.h. $a = -\frac{2}{3}$, und zugleich $D_x = -10\cdot(3b+40) \neq 0$, d.h. $b \neq -\frac{40}{3}$; auch D_y und D_z sind $\neq 0$ bei $b \neq 0$

c) $D = D_x = D_y = 0 \Rightarrow a = -\frac{2}{3}$ und zugleich $b = -\frac{40}{3}$

7.74 a kürzeste, b mittlere und c längste Seite (in cm);
I: a + 3 = b
II: c - 3 = b
III: 4c - 25 = 3b
$\Rightarrow$ a = 10 cm, b = 13 cm, c = 16 cm

7.75 Automat I: x Stück/h, Automat II: y Stück/h, Automat III: z Stück/h;
I: 2x + y + 3z = 37
II: 3y + 4z = 31
III: 3x + y = 35
x = 10, y = 5, z = 4

7.76 x Masse von A, y von B und z von C (in kg)
I: 2y + 4z = 4000
II: x + 2y + 2z = 4000
III: 4x + y + 4z = 4000
x = 400 kg, y = 1600 kg, z = 200 kg

7.77 A allein x, B allein y und C allein z Tage;
I: $\frac{6}{x}+\frac{6}{y}+\frac{6}{z}=1$
II: $\frac{4}{x}+\frac{4}{y}+\frac{8}{z}=1$
III: $\frac{3}{x}+\frac{9}{y}+\frac{7}{z}=1$
$u = \frac{1}{x}, v = \frac{1}{y}, w = \frac{1}{z}$; $\Rightarrow u = \frac{1}{18}, v = \frac{1}{36}, w = \frac{1}{12}$;
daraus: x = 18 Tage, y = 36 Tage, z = 12 Tage

7.78 a Länge, b Breite, h Höhe des Quaders (in cm);
I: $2\cdot[(a+1)\cdot b + (a+1)\cdot h + b\cdot h] = 2\cdot(a\cdot b + a\cdot h + b\cdot h) + 26$
II: $2\cdot[a\cdot(b+1) + a\cdot h + (b+1)\cdot h] = 2\cdot(a\cdot b + a\cdot h + b\cdot h) + 24$
III: $2\cdot[(a+2)\cdot(b+1) + (a+2)\cdot(h+2) + (b+1)\cdot(h+2)] = 2\cdot(a\cdot b + a\cdot h + b\cdot h) + 128$
I*: b + h = 13
II*: a + h = 12
III*: 3a + 4b + 3h = 56 $\Rightarrow$ a = 4 cm, b = 5 cm, h = 8 cm

7.79 a) I: $I_1 - I_2 - I_3 = 0$
II: $45\,I_1 + 30\,I_2 = 0$
III: $-30\,I_2 + 15\,I_3 = 20$
$I_1 = 0{,}24$ A; $I_2 = -0{,}36$ A; $I_3 = 0{,}61$ A

b) I: $I_0 + I_1 - I_2 = 0$
II: $5\,I_1 = -10$
III: $18\,I_2 = 10$
$I_0 = 2{,}56$ A; $I_1 = -2{,}00$ A; $I_2 = 0{,}56$ A

c) I: $-I_1 - I_2 + I_3 = 0$
II: $-25\,I_1 = -35$
III: $35\,I_2 = 25$
$I_1 = 1{,}40$ A; $I_2 = 0{,}71$ A; $I_3 = 2{,}11$ A

d) I: $I_1 - I_2 - I_3 = 0$
II: $8\,I_1 + 12\,I_2 = 20$
III: $-12\,I_2 + 15\,I_3 = 0$
$I_1 = 1{,}36$ A; $I_2 = 0{,}76$ A; $I_3 = 0{,}61$ A

7.80 a) I: 2u - v = 1
II: w + x = 5
III: u + v - w = -3
IV: 3u + 2x = 6

L = {(u, v, w, x)} = {(0, -1, 2, 3)}

II $\Rightarrow$ x = 5 - w, in IV einsetzen:
I*: 2u - v = 1
II*: u + v - w = -3
III*: 3u + 10 - 2w = 6

I* $\Rightarrow$ v = 2u - 1, in II* einsetzen:
I**: u + 2u - 1 - w = -3
II*: 3u + 10 - 2w = 6 oder
I**: 3u - w = -2
II**: 3u - 2w = -4
$\Rightarrow$ u = 0, w = 2; v = 2·0 - 1 = -1; x = 5 - 2 = 3;

7.80 b) I: $3a + 4c = 14$
II: $a + b + c = 6$
III: $4b + d = 7$
IV: $2b + 3c - d = 14$

$$L = \left\{\left(\frac{6}{5}, \frac{11}{5}, \frac{13}{5}, -\frac{9}{5}\right)\right\}$$

III $\Rightarrow d = 7 - 4b$, in IV einsetzen:

I*: $3a + 4c = 14$
II*: $a + b + c = 6$
III*: $6b + 3c = 21$

II* $\Rightarrow a = 6 - b - c$, in I* einsetzen:

I**: $-3b + c = -4$
II*: $6b + 3c = 21$
$\Rightarrow b = 11/5,\ c = 13/5,$
$a = 6 - b - c = 6/5;\ d = 7 - 4b = -9/5$

c) I: $2u + 2x - y = -5$
II: $u - w = -1$
III: $u + x - 2y = 2$
IV: $x + y = 1$
V: $u + v + w = 2$

II $\Rightarrow w = u + 1$, in V einsetzen:

I*: $2u + 2x - y = -5$
II*: $u + x - 2y = 2$
III*: $x + y = 1$
IV*: $2u + v = 1$

II* $\Rightarrow u = 2 - x + 2y$, in I* und IV* einsetzen:

I**: $3y = -9$
II**: $x + y = 1$
III**: $v - 2x + 4y = -3$
II** $\Rightarrow y = -3$; II* $\Rightarrow x = 1 - y = 4$;
III** $\Rightarrow v = -3 + 2x - 4y = 17$;
IV* $\Rightarrow u = \frac{1-v}{2} = -8$
$w = u + 1 = -7$

$L = \{(u, v, w, x, y)\} =$
$= \{(-8, 17, -7, 4, -3)\}$

7.81 Knotengleichungen:

$$\begin{array}{rrrrrrl} I_1 & +I_2 & +I_3 & & & & = 0 \\ & -I_2 & & +I_4 & -I_5 & & = 0 \\ -I_1 & & -I_3 & & & +I_6 & = 0 \\ & & & -I_4 & +I_5 & -I_6 & = 0. \end{array}$$

Jeder Strom kommt in diesen vier Gleichungen einmal mit "+" und einmal mit "-" vor. Man kann somit eine der drei Gleichungen, etwa die dritte, aus den anderen ableiten. Diese Gleichung kann weggelassen werden. Die Maschen werden im Uhrzeigersinn durchlaufen.
Dies ergibt schließlich insgesamt 6 unabhängige lineare Gleichungen:

I: $I_1 + I_2 + I_3 = 0$
II: $I_4 = I_2 + I_5$
III: $I_5 = I_4 + I_6$
IV: $R_1 \cdot I_1 - R_3 \cdot I_3 + R_6 \cdot (I_6 - I_3) + 20 = 0$
V: $-R_4 \cdot I_4 - 30 + R_3 \cdot I_3 + 20 = 0$
VI: $(R_2 + R_5 + R_7) \cdot I_5 + R_4 \cdot I_4 = 0$

I $\Rightarrow I_1 = -I_2 - I_3$, in IV einsetzen:

I*: $I_4 = I_2 + I_5$
II*: $I_5 = I_4 + I_6$
III*: $-40 \cdot I_2 - 140 \cdot I_3 + 50 \cdot I_6 + 20 = 0$
IV*: $-55 \cdot I_4 + 50 \cdot I_3 - 10 = 0$
V*: $130 \cdot I_5 + 55 \cdot I_4 = 0$

II* $\Rightarrow I_5 = I_4 + I_6$, in I* und V* einsetzen:

I**: $0 = I_2 + I_6$
II**: $-40 \cdot I_2 - 140 \cdot I_3 + 50 \cdot I_6 + 20 = 0$
III**: $-55 \cdot I_4 + 50 \cdot I_3 - 10 = 0$
IV*: $185 \cdot I_4 + 130\, I_6 = 0$

I** $\Rightarrow I_6 = -I_2$, in II** und IV** einsetzen:

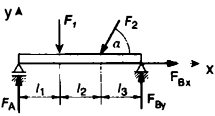
I***: $-90 \cdot I_2 - 140 \cdot I_3 + 20 = 0$
II***: $-55 \cdot I_4 + 50 \cdot I_3 - 10 = 0$
III***: $185 \cdot I_4 - 130\, I_2 = 0$

II*** $\Rightarrow I_3 = 1{,}1 \cdot I_4 + 0{,}2$, in I*** einsetzen:

I****: $-90 \cdot I_2 - 154 \cdot I_4 - 8 = 0$
II****: $185 \cdot I_4 - 130\, I_2 = 0$
$\Rightarrow I_2 = -0{,}040$ A; $I_4 = -0{,}029$ A;

$I_3 = 1{,}1 \cdot I_4 + 0{,}2 = 0{,}168$ A;
$I_6 = -I_2 = 0{,}040$ A;
$I_5 = I_4 + I_6 = I_5 = 0{,}011$ A;
$I_1 = -I_2 - I_3 = -0{,}129$ A;

7.82 Momente bezüglich Auflagerpunkt A:



$$\text{I}: \quad F_A + F_{By} - F_1 - F_2 \cdot \sin\alpha = 0$$
$$\text{II}: \quad F_{Bx} - F_2 \cdot \cos\alpha = 0$$
$$\text{III}: -F_1 \cdot l_1 - F_2 \cdot (l_1 + l_2) \cdot \sin\alpha + F_{By} \cdot (l_1 + l_2 + l_3) = 0$$

a)
$$\text{I}: \quad F_A + F_{By} - 300 - 250 \cdot \sin 40° = 0$$
$$\text{II}: \quad F_{Bx} - 250 \cdot \cos 40° = 0$$
$$\text{III}: -300 \cdot 0{,}7 - 250 \cdot 1{,}1 \cdot \sin 40° + F_{By} \cdot 1{,}4 = 0$$

I: $F_{Bx} = 191{,}51$
II: $F_A + F_{By} = 460{,}70$
III: $1{,}4 \cdot F_{By} = 386{,}8$

$\Rightarrow F_A = 184$ N
$F_{Bx} = 191{,}5$ N
$F_{By} = 276{,}3$ N
$F_B = 336$ N

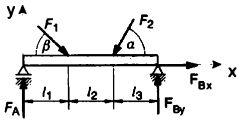
b)
$$\text{I}: \quad F_A + F_{By} - 250 - 300 \cdot \sin 50° = 0$$
$$\text{II}: \quad F_{Bx} - 300 \cdot \cos 50° = 0$$
$$\text{III}: -250 \cdot 0{,}6 - 300 \cdot 1{,}2 \cdot \sin 50° + F_{By} \cdot 1{,}8 = 0$$

$\Rightarrow$ $F_A = 243$ N
$F_{Bx} = 192{,}8$ N
$F_{By} = 236{,}5$ N
$F_B = 305$ N

7.82 c) $\text{I}:\ F_A + F_{By} - 500 - 600 \cdot \sin 60° = 0$
$\text{II}:\ F_{Bx} - 600 \cdot \cos 60° = 0$
$\text{III}: -500 \cdot 0{,}5 - 600 \cdot 1{,}2 \cdot \sin 60° + F_{By} \cdot 2{,}0 = 0$
$\Rightarrow$ $F_A = 583$ N, $F_{Bx} = 300{,}0$ N, $F_{By} = 436{,}8$ N, $F_B = 530$ N

d) $\text{I}:\ F_A + F_{By} - 400 - 500 \cdot \sin 45° = 0$
$\text{II}:\ F_{Bx} - 500 \cdot \cos 45° = 0$
$\text{III}: -400 \cdot 0{,}85 - 500 \cdot 1{,}35 \cdot \sin 45° + F_{By} \cdot 2{,}25 = 0$
$\Rightarrow$ $F_A = 390$ N, $F_{Bx} = 353{,}6$ N, $F_{By} = 363{,}2$ N, $F_B = 507$ N

7.83 Momente bezüglich Auflagerpunkt A:
$\text{I}:\ F_A + F_{By} - F_1 \cdot \sin \beta - F_2 \cdot \sin \alpha = 0$
$\text{II}:\ F_{Bx} + F_1 \cdot \cos \beta - F_2 \cdot \cos \alpha = 0$
$\text{III}: -F_1 \cdot l_1 \cdot \sin \beta - F_2 \cdot (l_1 + l_2) \cdot \sin \alpha + F_{By} \cdot (l_1 + l_2 + l_3) = 0$



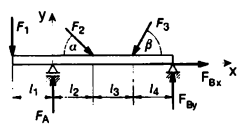
a) $\text{I}:\ F_A + F_{By} - 300 \cdot \sin 35° - 250 \cdot \sin 45° = 0$
$\text{II}:\ F_{Bx} + 300 \cdot \cos 35° - 250 \cdot \cos 45° = 0$
$\text{III}: -300 \cdot 0{,}75 \cdot \sin 35° - 250 \cdot 1{,}05 \cdot \sin 45° + F_{By} \cdot 1{,}25 = 0$
$\Rightarrow$ $F_A = 97$ N, $F_{Bx} = -69{,}0$ N, $F_{By} = 251{,}7$ N, $F_B = 261$ N

b) $\text{I}:\ F_A + F_{By} - 250 \cdot \sin 60° - 300 \cdot \sin 55° = 0$
$\text{II}:\ F_{Bx} + 250 \cdot \cos 60° - 300 \cdot \cos 55° = 0$
$\text{III}: -250 \cdot 0{,}8 \cdot \sin 60° - 300 \cdot 1{,}2 \cdot \sin 55° + F_{By} \cdot 1{,}7 = 0$
$\Rightarrow$ $F_A = 187$ N, $F_{Bx} = 47{,}1$ N, $F_{By} = 275{,}4$ N, $F_B = 279$ N

c) $\text{I}:\ F_A + F_{By} - 500 \cdot \sin 55° - 600 \cdot \sin 30° = 0$
$\text{II}:\ F_{Bx} + 500 \cdot \cos 55° - 600 \cdot \cos 30° = 0$
$\text{III}: -500 \cdot 0{,}9 \cdot \sin 55° - 600 \cdot 1{,}5 \cdot \sin 30° + F_{By} \cdot 2{,}35 = 0$
$\Rightarrow$ $F_A = 361$ N, $F_{Bx} = 232{,}8$ N, $F_{By} = 348{,}3$ N, $F_B = 419$ N

d) $\text{I}:\ F_A + F_{By} - 400 \cdot \sin 60° - 500 \cdot \sin 20° = 0$
$\text{II}:\ F_{Bx} + 400 \cdot \cos 60° - 500 \cdot \cos 20° = 0$
$\text{III}: -400 \cdot 0{,}95 \cdot \sin 60° - 500 \cdot 1{,}45 \cdot \sin 20° + F_{By} \cdot 2{,}25 = 0$
$\Rightarrow$ $F_A = 261$ N, $F_{Bx} = 269{,}8$ N, $F_{By} = 256{,}5$ N, $F_B = 372$ N

7.84 Momente bezüglich Auflagerpunkt A. Allgemein:
$\text{I}:\ F_A + F_{By} - F_1 - F_2 \cdot \sin \alpha - F_3 \cdot \sin \beta = 0$
$\text{II}:\ F_{Bx} + F_2 \cdot \cos \alpha - F_3 \cdot \cos \beta = 0$
$\text{III}: F_1 \cdot l_1 - F_2 \cdot l_2 \cdot \sin \alpha - F_3 \cdot (l_2 + l_3) \cdot \sin \beta + F_{By} \cdot (l_2 + l_3 + l_4) = 0$



a) $\text{I}:\ F_A + F_{By} - 350 - 450 \cdot \sin 45° - 200 \cdot \sin 30° = 0$
$\text{II}:\ F_{Bx} + 450 \cdot \cos 45° - 200 \cdot \cos 30° = 0$
$\text{III}: 350 \cdot 0{,}7 - 450 \cdot 0{,}55 \cdot \sin 45° - 200 \cdot 0{,}9 \cdot \sin 30° + F_{By} \cdot 1{,}2 = 0$
$\Rightarrow$ $F_A = 752$ N, $F_{Bx} = -145{,}0$ N, $F_{By} = 16{,}7$ N, $F_B = 146$ N

b) $\text{I}:\ F_A + F_{By} - 200 - 350 \cdot \sin 55° - 400 \cdot \sin 25° = 0$
$\text{II}:\ F_{Bx} + 350 \cdot \cos 55° - 400 \cdot \cos 25° = 0$
$\text{III}: 200 \cdot 0{,}65 - 350 \cdot 0{,}65 \cdot \sin 55° - 400 \cdot 1{,}05 \cdot \sin 25° + F_{By} \cdot 1{,}65 = 0$
$\Rightarrow$ $F_A = 514$ N, $F_{Bx} = 161{,}8$ N, $F_{By} = 141{,}7$ N, $F_B = 215$ N

7.84 c) $\text{I}: \quad F_A + F_{By} - 700 - 300 \cdot \sin 60° - 500 \cdot \sin 40° = 0$

$\text{II}: F_{Bx} + 300 \cdot \cos 60° - 500 \cdot \cos 40° = 0$

$\text{III}: 700 \cdot 0{,}3 - 300 \cdot 0{,}75 \cdot \sin 60° - 500 \cdot 1{,}45 \cdot \sin 40° + F_{By} \cdot 2{,}25 = 0$

$\Rightarrow$ $F_A = 1081$ N, $F_{Bx} = 233{,}0$ N, $F_{By} = 200{,}4$ N, $F_B = 307$ N

d) $\text{I}: \quad F_A + F_{By} - 400 - 500 \cdot \sin 45° - 400 \cdot \sin 55° = 0$

$\text{II}: F_{Bx} + 500 \cdot \cos 45° - 400 \cdot \cos 55° = 0$

$\text{III}: 400 \cdot 0{,}85 - 500 \cdot 0{,}5 \cdot \sin 45° - 400 \cdot 1{,}1 \cdot \sin 55° + F_{By} \cdot 2{,}0 = 0$

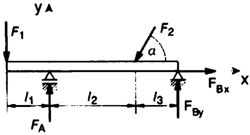
$\Rightarrow$ $F_A = 983$ N, $F_{Bx} = -124{,}1$ N, $F_{By} = 98{,}6$ N, $F_B = 159$ N

7.85 Momente bezüglich Auflagerpunkt A. Allgemein:

$\text{I}: \quad F_A + F_{By} - F_1 - F_2 \cdot \sin \alpha = 0$

$\text{II}: F_{Bx} - F_2 \cdot \cos \alpha = 0$

$\text{III}: F_1 \cdot l_1 - F_2 \cdot l_2 \cdot \sin \alpha + F_{By} \cdot (l_2 + l_3) = 0$



a) $\text{I}: \quad F_A + F_{By} - 350 - 450 \cdot \sin 45° = 0$

$\text{II}: F_{Bx} - 450 \cdot \cos 45° = 0$

$\text{III}: 350 \cdot 0{,}7 - 450 \cdot 1{,}2 \cdot \sin 45° + F_{By} \cdot 1{,}55 = 0$

$\Rightarrow$ $F_A = 580$ N, $F_{Bx} = 318{,}2$ N, $F_{By} = 88{,}3$ N, $F_B = 330$ N

b) $\text{I}: \quad F_A + F_{By} - 200 - 350 \cdot \sin 55° = 0$

$\text{II}: F_{Bx} - 350 \cdot \cos 55° = 0$

$\text{III}: 200 \cdot 0{,}65 - 350 \cdot 1{,}5 \cdot \sin 55° + F_{By} \cdot 1{,}9 = 0$

$\Rightarrow$ $F_A = 329$ N, $F_{Bx} = 200{,}8$ N, $F_{By} = 157{,}9$ N, $F_B = 255$ N

c) $\text{I}: \quad F_A + F_{By} - 700 - 300 \cdot \sin 60° = 0$

$\text{II}: F_{Bx} - 300 \cdot \cos 60° = 0$

$\text{III}: 700 \cdot 0{,}3 - 300 \cdot 0{,}75 \cdot \sin 60° + F_{By} \cdot 1{,}45 = 0$

$\Rightarrow$ $F_A = 970$ N, $F_{Bx} = 150{,}0$ N, $F_{By} = -10{,}4$ N, $F_B = 150$ N

d) $\text{I}: \quad F_A + F_{By} - 400 - 500 \cdot \sin 45° = 0$

$\text{II}: F_{Bx} - 500 \cdot \cos 45° = 0$

$\text{III}: 400 \cdot 0{,}85 - 500 \cdot 1 \cdot \sin 45° + F_{By} \cdot 1{,}6 = 0$

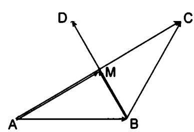
$\Rightarrow$ $F_A = 745$ N, $F_{Bx} = 353{,}6$ N, $F_{By} = 8{,}5$ N, $F_B = 354$ N

8 Vektorrechnung

8.1 a) $A_1(4/1)$, $B_1(6/4)$, $C_1(0/5)$ **b)** $A_1(6/3)$, $B_1(8/6)$, $C_1(2/7)$ **c)** $A_1(1/4)$, $B_1(3/7)$, $C_1(-3/8)$

8.2 a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, ja b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, nein

8.3 Von jedem der 5 Punkte A, B, C, D und M kann ein Pfeil zu vier Punkten gezogen werden; insgesamt sind dies 5·4 = 20 Pfeile. Diese stellen, wenn man von den jeweiligen Gegenvektoren absieht, 6 Vektoren dar, die wie folgt ausgedrückt werden können:
$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}$,



8.4 a) ist richtig

8.5 a) $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ b) $\sqrt{1^2 + 1^2} = 1{,}41$ c) $\sqrt{(-1)^2 + 0} = 1$ d) $\sqrt{2^2 + (-3)^2} = 3{,}61$

e) $\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = 1{,}41$ f) $\sqrt{0{,}6^2 + (-0{,}8)^2} = 1$

8.6 $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}-1\\6\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CA}=\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}$, $a=\left|\overrightarrow{BC}\right|=6{,}083$; $b=\left|\overrightarrow{CA}\right|=5$; $c=\left|\overrightarrow{AB}\right|=4{,}472$;

$s=s=\frac{1}{2}\cdot(a+b+c)=7{,}777$; $s-a=1{,}695$; $s-b=2{,}777$; $s-c=3{,}305$; $A=11$

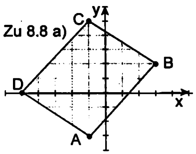
8.7 a) $\overline{PQ}=\sqrt{(5-1)^2+(3-2)^2}=4{,}12$ b) $\overline{PQ}=\sqrt{(3-(-1))^2+(2-3)^2}=5{,}10$

c) $\overline{PQ}=\sqrt{(4-(-1))^2+(-2-1)^2}=5{,}83$

8.8 a) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}-4\\-5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DA}=\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$;

$a \parallel c$; $a=c=6{,}4$; $b \parallel d$; $b=d=5$; ja

b) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}-8\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DA}=\begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$; nein



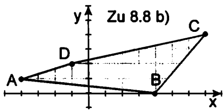
8.9 a) ΔABC: $a=6{,}40$; $b=5$; $e=8$; $A_{ABC}=16$

$A_{ACD}=A_{ABC}$; $A=32$

b) ΔABC: $a=8{,}06$; $b=5$; $e=12{,}08$; $A_{ABC}=14{,}5$

ΔACD: $e=12{,}08$; $c=8{,}25$; $d=4{,}25$; $A_{ACD}=9{,}0$

$A=A_{ABC}+A_{ACD}=23{,}5$



8.10 a) $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$

8.11 a) (2/1) b) (0/3) c) (–3/5)

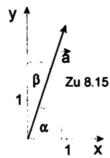
8.12 $\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$

8.13 Auf einem Kreis mit dem Radius gleich dem Betrag der Ortsvektoren

8.14 $\vec{a}=\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}-4\\7\end{pmatrix}$; $a=|\vec{a}|=8{,}06$; $\vec{b}=\overrightarrow{CA}=\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}$; $b=|\vec{b}|=5{,}83$; $\vec{c}=\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}7\\-2\end{pmatrix}$; $c=|\vec{c}|=7{,}28$

8.15 $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$; $\tan\alpha=\frac{a_y}{a_x}=\frac{3}{1}$ $\Rightarrow$ $\alpha=71{,}6°$ (Winkel mit der x-Achse);

$\beta=90-\alpha=18{,}4°$ (Winkel mit der y-Achse)



8.16 a) $\cos\alpha=\frac{a_x}{|\vec{a}|}$ $\Rightarrow$ $a_x=|\vec{a}|\cdot\cos\alpha=5\cdot\cos 60°=2{,}50$;

$\sin\alpha=\frac{a_y}{|\vec{a}|}$ $\Rightarrow$ $a_y=|\vec{a}|\cdot\sin\alpha=5\cdot\sin 60°=4{,}33$; $\vec{a}=\begin{pmatrix}2{,}50\\4{,}33\end{pmatrix}$

b) $a_x=|\vec{a}|\cdot\cos\alpha=1\cdot\cos 25°=0{,}91$;

$a_y=|\vec{a}|\cdot\sin\alpha=1\cdot\sin 25°=0{,}42$; $\vec{a}=\begin{pmatrix}0{,}91\\0{,}42\end{pmatrix}$

c) $a_x=|\vec{a}|\cdot\cos\alpha=3\cdot\cos 90°=0$;

$a_y=|\vec{a}|\cdot\sin\alpha=3\cdot\sin 90°=3$; $\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$

d) $\vec{a}=\begin{pmatrix}-4{,}70\\1{,}71\end{pmatrix}$ e) $\vec{a}=\begin{pmatrix}-2{,}57\\-3{,}06\end{pmatrix}$ f) $\vec{a}=\begin{pmatrix}2{,}90\\-0{,}78\end{pmatrix}$

8.17 a) $a_x=|\vec{a}|\cdot\cos\alpha \Rightarrow |\vec{a}|=\frac{4}{\cos 40°}=5{,}22$;

$a_y=|\vec{a}|\cdot\sin\alpha=5{,}22\cdot\sin 50°=3{,}36$

b) $a_x=|\vec{a}|\cdot\cos\alpha \Rightarrow |\vec{a}|=\frac{4}{\cos(-40°)}=5{,}22$;

$a_y=|\vec{a}|\cdot\sin\alpha=5{,}22\cdot\sin 90°=-3{,}36$

c) $a_x=-4$; $|\vec{a}|=\frac{-4}{\cos 120°}=8$;

$a_y=8\cdot\sin 120°=6{,}93$

d) $a_y=|\vec{a}|\cdot\sin\alpha \Rightarrow |\vec{a}|=\frac{2}{\sin 60°}=2{,}31$

$a_x=|\vec{a}|\cdot\cos\alpha=2{,}31\cdot\cos 60°=1{,}15$

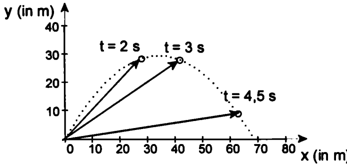
e) $|\vec{a}|=\frac{2}{\sin 120°}=2{,}31$; $a_x=2{,}31\cdot\cos 120°=-1{,}15$

f) $|\vec{a}|=\frac{5}{\sin 30°}=10$; $a_x=10\cdot\cos 30°=8{,}66$

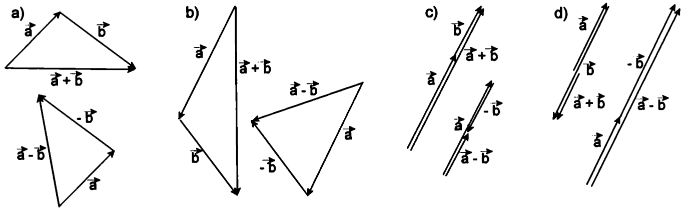
8.18 $\vec{r}(2) = \begin{pmatrix} 27{,}8\ \text{m} \\ 28{,}5\ \text{m} \end{pmatrix}$

$\vec{r}(3) = \begin{pmatrix} 41{,}7\ \text{m} \\ 28{,}0\ \text{m} \end{pmatrix}$

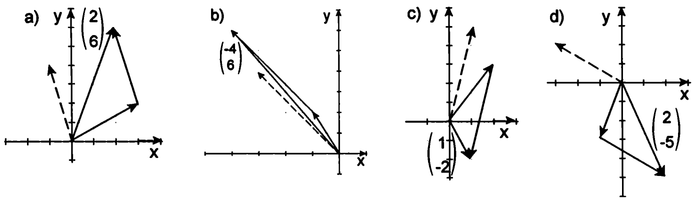
$\vec{r}(4{,}5) = \begin{pmatrix} 62{,}5\ \text{m} \\ 8{,}9\ \text{m} \end{pmatrix}$



8.19



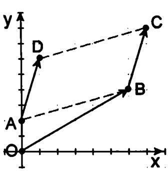
8.20



8.21 a) $\vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{a}-\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{a}-\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ c) $\vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$; $\vec{a}-\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{a}-\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

8.22 a)



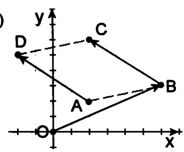
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$;

C/(7/8)

b)



$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$;

$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$;

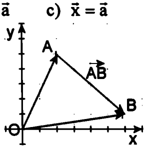
C/(2/6)

8.23 a) $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$ b) $\vec{x} = \vec{a}$ c) $\vec{x} = \vec{a}$

8.24 a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \Rightarrow$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} =$

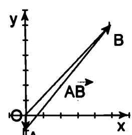
$= \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$



b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \Rightarrow$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} =$

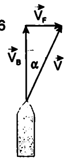
$= \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$



8.25 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{AB}$ a) A(1/3) b) A(1/3)

8.26 a) $v_B = 2{,}0$ m/s, $v_F = 1{,}0$ m/s; $\tan\alpha = \frac{v_F}{v_B} = 0{,}5 \Rightarrow \alpha = 26{,}6°$

Zu 8.26



b) $v = \sqrt{v_B^2 + v_F^2} = 2{,}2$ m/s

c) $v_B \cdot t = 500 \Rightarrow t = 250$ s; $s = v_F \cdot t = 1{,}0 \cdot 250 = 250$ m

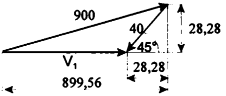
d) $t = 250$ s = 4 min 10 s

8.27 $v = \sqrt{500^2 - 20^2} = 499{,}6$ km/h

8.28 a) $40 \cdot \cos 45° = 28{,}28$ km/h;

$v_1 + 28{,}28 = \sqrt{900^2 - 28{,}28^2} = 899{,}56 \Rightarrow v_1 \approx 871$ km/h;

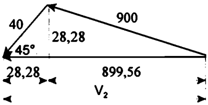
$1600 = v \cdot t \Rightarrow t = \frac{1600}{v_1} = 1{,}84$ h ≈ 1 h 50 min für Hinflug



b) $\sqrt{900^2 - 28{,}28^2} = 899{,}56$ km/h;

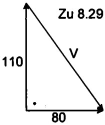
$v_2 = 899{,}56 + 28{,}28 \approx 928$ km/h;

$1600 = v_2 \cdot t \Rightarrow t = \frac{1600}{v_2} = 1{,}72$ h ≈ 1 h 43 min für Rückflug



8.29 $v = \sqrt{110^2 + 80^2} \approx 136$ km/h

Zu 8.29



8.30 a) $\vec{F_R} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$ oder $\begin{pmatrix} F_{Rx} \\ F_{Ry} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \end{pmatrix}$; $F_{1x} = 150$, $F_{2x} = 120 \cdot \cos 80°$;

$F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x} = 170{,}8$ N; $F_{1y} = 0$, $F_{2y} = 120 \cdot \sin 80°$; $F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} = 118{,}2$ N;

$F_R = \sqrt{170{,}8^2 + 118{,}2^2} = 207{,}7$ N; $\tan\alpha = \frac{F_{Ry}}{F_{Ry}} \Rightarrow \alpha = 34{,}7°$.

b) $F_{1x} = 100 \cdot \cos 40°$; $F_{2x} = 100 \cdot \cos 160°$; $F_{3x} = 100 \cdot \cos 280°$; $F_{1y} = 100 \cdot \sin 40°$; $F_{2y} = 100 \cdot \sin 160°$; $F_{3y} = 100 \cdot \sin 280°$; $F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 0$ N; $F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 0$ N; $F_R = 0$ N, Winkel unbestimmt

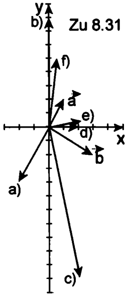
c) $F_{1x} = 140 \cdot \cos 10°$; $F_{2x} = 90 \cdot \cos(10° + 110°)$; $F_{3x} = 60 \cdot \cos(360° - 35°)$;
$F_{1y} = 140 \cdot \sin 10°$; $F_{2y} = 90 \cdot \sin(10° + 110°)$; $F_{3y} = 60 \cdot \sin(360° - 35°)$;

$F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} = 142{,}0$ N; $F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} = 67{,}8$ N; $F_R = \sqrt{142{,}0^2 + 67{,}8^2} = 157{,}4$ N;

$\tan\alpha = \frac{F_{Ry}}{F_{Ry}} \Rightarrow \alpha = 25{,}5°$ (da F_{Rx} und zugleich F_{Ry} positiv)

8.31 a) $\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 \\ -12 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 13/6 \\ 1/6 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Zu 8.31



8.32 $\begin{pmatrix} b_x \\ 6 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, k positiv $\Rightarrow b_x = -2k$ und $6 = k \cdot 3$; daraus $k = 2$ und damit $b_x = -2 \cdot 2 = -4$.

8.33 $\overrightarrow{HC} = \frac{1}{2} \cdot \vec{a} + \vec{b}$; $\overrightarrow{HD} = -\frac{1}{2} \cdot \vec{a} + \vec{b}$; $\overrightarrow{HE} = -\frac{1}{2} \cdot \vec{a} + 2\vec{b}$;

$\overrightarrow{BE} = -\vec{a} + 2\vec{b}$; $\overrightarrow{CE} = -\vec{a} + \vec{b}$

8.34 $\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}$ sind parallel; $\vec{a}, \vec{c}$ gleichgerichtet; $\vec{a}, \vec{d}$ entgegengesetzt gerichtet; $\vec{c}, \vec{d}$ entgegengesetzt gerichtet

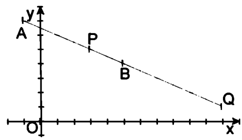
8.35 a) Es müsste gelten: $\overrightarrow{PQ} = k \cdot \overrightarrow{RS}$ oder $\overrightarrow{PS} = k \cdot \overrightarrow{QR}$; $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{RS} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; $5 = k \cdot (-4)$ und zugleich $0 = k \cdot 1$ *oder* $1 = k \cdot 0$ und zugleich $4 = 3 \cdot k$? Nicht wahr, also kein Trapez

8.35 b) $\overline{PQ} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $\overline{RS} = \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$; $\overline{PS} = \begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}$; $\overline{QR} = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$, -3 = k·3 und zugleich 2 = k·1 *oder* 0 = k·0 und zugleich 3 = 6·k; letzteres ist der Fall für k = 0,5: 0 = 0,5·0 und zugleich 3 = 0,5·6; die Seiten $\overline{PS}$ und $\overline{QR}$ sind parallel, also liegt ein Trapez vor

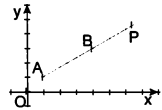
8.36 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\cdot\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$: P(3/5);

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + 2\cdot\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11\\1\end{pmatrix}$: Q(11/1)



8.37 $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$; $\vec{v}_0 = \frac{1}{\sqrt{3^2+2^2}}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$;

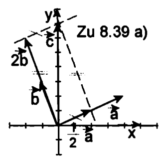
$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + 3\cdot\vec{v}_0 = \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} + 3\cdot\frac{1}{\sqrt{13}}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}6,5\\4,7\end{pmatrix}$; P(6,5/4,7)



8.38 $\vec{c} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$; $\vec{c}_0 = \frac{1}{\sqrt{29}}\cdot\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$; $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$; $\vec{b}_0 = \frac{1}{\sqrt{13}}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$; $\vec{e} = \vec{c}_0 + \vec{b}_0 = \begin{pmatrix}1,761\\0,183\end{pmatrix}$;

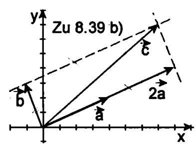
gesuchter Einheitsvektor: $\vec{e}_0 = \frac{1}{1,770}\cdot\begin{pmatrix}1,761\\0,183\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}0,99\\0,10\end{pmatrix}$

8.39 a) $\begin{pmatrix}0\\7\end{pmatrix} = k_1\cdot\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} + k_2\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ oder
I: $0 = 4\cdot k_1 - k_2$
II: $\underline{7 = 2\cdot k_1 + 3\cdot k_2}$
$\Rightarrow k_1 = 0,5;\ k_2 = 2;$
$\vec{c} = 0,5\cdot\vec{a} + 2\cdot b$



b) $\begin{pmatrix}7\\7\end{pmatrix} = k_1\cdot\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} + k_2\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ oder
I: $7 = 4\cdot k_1 - k_2$
II: $\underline{7 = 2\cdot k_1 + 3\cdot k_2}$
$\Rightarrow k_1 = 2;\ k_2 = 1;\ \vec{c} = 2\cdot\vec{a} + b$

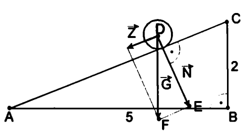
c) $\begin{pmatrix}14\\0\end{pmatrix} = k_1\cdot\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} + k_2\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ oder
I: $14 = 4\cdot k_1 - k_2$
II: $\underline{0 = 2\cdot k_1 + 3\cdot k_2}$
$\Rightarrow k_1 = 3;\ k_2 = -2;\ \vec{c} = 3\cdot\vec{a} - 2\cdot b$



d) $\begin{pmatrix}-6\\4\end{pmatrix} = k_1\cdot\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} + k_2\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ oder
I: $-6 = 4\cdot k_1 - k_2$
II: $\underline{4 = 2\cdot k_1 + 3\cdot k_2}$
$\Rightarrow k_1 = -1;\ k_2 = 2;\ \vec{c} = -\vec{a} + 2\cdot b$

8.40 Die rechtwinkligen Dreiecke ABC und DEF sind ähnlich; daher stimmen die Verhältnisse "Kurze Kathete" zu "Hypotenuse" in beiden Dreiecken überein:

$\frac{Z}{G} = \frac{2}{\sqrt{2^2+5^2}} \Rightarrow Z = 3,7\ \text{N}$

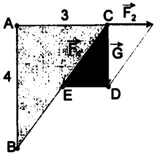


8.41 Die rechtwinkligen Dreiecke ABC und DCE sind ähnlich:

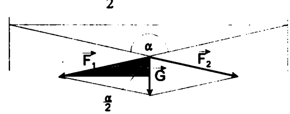
$\frac{F_1}{G} = \frac{\sqrt{3^2+4^2}}{4} \Rightarrow$

$F_1 = 62,5$ N;

$F_2 = \sqrt{F_1^2 - G^2} = 37,5$ N



8.42 $F_1 = F_2 = \frac{G/2}{\cos\frac{\alpha}{2}} = 177,5\ \text{N}$

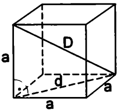


9 Stereometrie

9.1 $V=\frac{m}{\rho}$; $a=\sqrt[3]{V}$

a) $V = 0{,}25\ dm^3$; $a = 0{,}63\ dm$ b) $V = 0{,}10\ dm^3$; $a = 0{,}47\ dm$
c) $V = 8{,}0\ dm^3$; $a = 2{,}00\ dm$ d) $V = 0{,}74\ dm^3$; $a = 0{,}90\ dm$
e) $V = 4{,}26\ dm^3$; $a = 1{,}62\ dm$ f) $V = 0{,}22\ dm^3$; $a = 0{,}61\ dm$

Zu 9.3



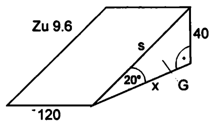
9.2 $m = 0{,}1^2\cdot10^{-6}\cdot19{,}3\ kg = 1{,}93\cdot10^{-6}\ kg = 19{,}3\ mg$

9.3 Diagonale $d=a\cdot\sqrt{2}$; Raumdiagonale D = $D=\sqrt{d^2+a^2}=a\cdot\sqrt{3}$;
$a=\frac{20}{\sqrt{3}}\approx 11{,}55\ cm$; $O=6\cdot a^2=\frac{6\cdot 400}{3}=800cm^2$

9.4 a) $A=2\cdot0{,}9\cdot0{,}25+2\cdot0{,}2\cdot1{,}05+1{,}8\cdot0{,}2=1{,}23\ dm^2$; $V=1{,}23\cdot10=12{,}3dm^3$; $m=7{,}85\cdot V\approx 96{,}6\ kg$
b) $A=1{,}2\cdot0{,}18+2\cdot0{,}2\cdot0{,}1+0{,}74\cdot0{,}2+0{,}6\cdot0{,}18=0{,}512\ dm^2$;
$V=0{,}512\cdot10=5{,}12dm^3$; $m=7{,}85\cdot V\approx 40{,}2\ kg$

9.5 Länge $=12{,}00\ m$; $G=7\cdot3+\frac{7\cdot1{,}5}{2}=26{,}25\ m^2$; $V=315{,}0\ m^3$

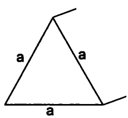
Zu 9.6



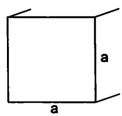
9.6 $\tan 20°=\frac{4}{x}\ \Rightarrow\ x=10{,}99\ dm$; $G=\frac{4\cdot x}{2}=21{,}98\ dm^2$;
$V = G\cdot12 = 264\ dm^3$;
$\sin 20°=\frac{4}{s}$; $s=11{,}70\ dm$; $O = 2\cdot G + 12\cdot s + 12\cdot x + 12\cdot4 = 364\ dm^2$

9.7 a) $V = 2\cdot(100\cdot75\text{-}40^2)\cdot12 + (120 - 2\cdot12)\cdot75\cdot14 + (120\text{-}2\cdot12)\cdot(100\text{-}14)\cdot12 = 341472\ cm^3 \approx 341\ dm^3$
b) Quader abzüglich zwei dreiseitige Prismen: $G = 70\cdot80 - 2\cdot\frac{42\cdot30}{2} = 4340\ cm^3$;
$V = G\cdot110 = 477400\ cm^3 \approx 477\ dm^3$
c) Die Grundfläche G des Prismas setzt sich aus zwei gleich großen Trapezen und einem Rechteck zusammen: $G = 2\cdot\frac{40+16}{2}\cdot12 + 16\cdot40 = 1312\ cm^2$; $V = G\cdot40 = 52480\ cm^3 \approx 52{,}5\ dm^3$

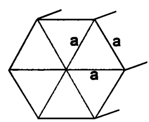
9.8



$G=\frac{a^2}{4}\cdot\sqrt{3}$;
$m = \rho\cdot G\cdot h = 0{,}0881\ kg \approx 88\ g$



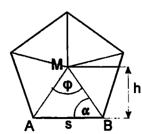
$G=a^2$;
$m = \rho\cdot G\cdot h = 0{,}203\ kg \approx 203\ g$



$G=6\cdot\frac{a^2}{4}\cdot\sqrt{3}$;
$m = \rho\cdot G\cdot h = 0{,}529\ kg \approx 529\ g$

9.9 Gewicht = $m\cdot g = \rho\cdot V\cdot g$; Längen in dm, x Länge des Brettes; Brettvolumen $V = x\cdot1\ 6 = 6\cdot x$;
Wassergewicht bei Volumen V (da Brett vollständig eingetaucht): $\rho_{Wasser}\cdot V\cdot g = 1\ kg/dm^3\cdot V\cdot g$;
Gewicht des Brettes: $0{,}60\cdot V\cdot g$; Gewicht der Person: $65\cdot g$;
$1\ kg/dm^3\cdot V\cdot g = 0{,}60\ kg/dm^3\cdot V\cdot g + 65kg\cdot g$ oder $6x = 0{,}6\cdot6x + 65 \Rightarrow x = 27{,}1\ dm = 271\ cm$

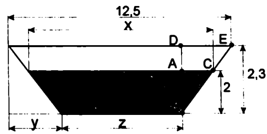
9.10 Zentriwinkel $\varphi=\frac{360°}{5}=72°$; $\alpha=\frac{180°-\varphi}{2}=54°$;
$\tan\alpha=\frac{h}{s/2}\Rightarrow h = 20{,}65\ cm$; $A_{Fünfeck}=5\cdot\frac{s\cdot h}{2}=1548{,}43\ cm^2$;
$V_{Glas} = A_{Fünfeck}\cdot0{,}5 = 774{,}21\ cm^3$; $m = \rho\cdot V = 1935{,}5\ g \approx 1{,}9\ kg$



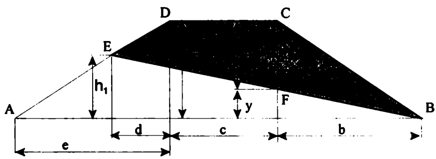
9.11 $a : b = 1 \cdot 2 \Rightarrow b = 2a = 12$ cm; $a : c = 1 : 5 \Rightarrow c = 5a = 30$ cm;
$V = a \cdot b \cdot c = 2160\ \text{cm}^3 \approx 2{,}16\ \text{dm}^3$; $O = 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c) = 1224\ \text{cm}^2 \approx 12{,}2\ \text{dm}^2$

9.12 Die Wasserquerschnittsfläche G ist ein Trapez;
$h = 2 - 0{,}3 = 1{,}7$ m; $8 : 2 = b : h \Rightarrow b = 6{,}8$ m
$G = \frac{(b+25)+25}{2} \cdot h = 58\ \text{m}^2$; $48{,}28\ \text{m}^2$; $V = 10 \cdot G \approx 483\ \text{m}^3$

9.13 $2{,}3 : y = 1 : 1{,}4 \Rightarrow y = 3{,}22$ m; $z = 12{,}5 - 2y = 6{,}06$ m;
Dreiecke ABC und DBE sind ähnlich $\Rightarrow$
$\frac{(x-z)/2}{2} = \frac{(12{,}5-z)/2}{2{,}3} \Rightarrow x = 11{,}66$ m;
Die Wasserquerschnittsfläche G ist ein Trapez:
$G = \frac{x+z}{2} \cdot 2 = 17{,}72\ \text{m}^2$; $V = 100 \cdot G = 1772\ \text{m}^3$



9.14 Idee: Fläche BCDE = Fläche ABCD abzüglich die Dreiecksfläche ABE. $h = 3{,}4$ m, $c = 8$ m.
Steigung der Strecke BC: 1 m auf 1,5 m, also $\frac{h+y}{b} = \frac{1}{1{,}5}$;
Steigung der Strecke BF: 1 m auf 10 m, also $\frac{y}{b} = \frac{1}{10}$;



das sind zwei Gleichungen für die Unbekannten y und b: $b = 10 \cdot y$ aus der ersten in die zweite Gleichung einsetzen: $\frac{h+y}{10 \cdot y} = \frac{1}{1{,}5} \Rightarrow y = 0{,}6$ m; $b = 10 \cdot y = 6{,}0$ m; $H = h + y = 3{,}4 + 0{,}6 = 4{,}0$ m;

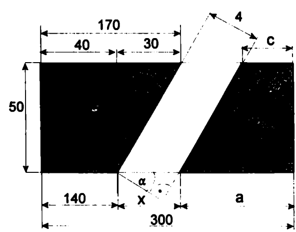
Steigung ED: 1 m auf 3 m, also $\frac{H}{e} = \frac{1}{3} \Rightarrow e = 3 \cdot H = 12{,}0$ m;

$\frac{h_1}{b+c+d} = \frac{1}{10}$ sowie $\frac{h_1}{e-d} = \frac{1}{3}$, zwei Gleichungen für die Unbekannten h_1 und d; aus der zweiten Gleichung $h_1 = \frac{e-d}{3}$ in die zweite einsetzen: $\frac{12-d}{6+8+d} = \frac{3}{10} \Rightarrow d = 6{,}0$ m; $h_1 = \frac{e-d}{3} = 2{,}0$ m.

$A_{ABE} = \frac{(b+c+e) \cdot h_1}{2} = 26\ \text{m}^2$; $A_{BCDE} = \frac{(b+c+e)+c}{2} \cdot H = 68\ \text{m}^2$; $A_{BCDE} - A_{ABE} = 42\ \text{m}^2$;
$V = 1 \cdot \text{m} \cdot 42\ \text{m}^2 = 42\ \text{m}^3$ Aufschüttungsmaterial pro Laufmeter

9.15 $G_1 = 400\ \text{dm}^2$, $G_2 = 900\ \text{dm}^2$; Höhe in beiden Tanks gleich h (Flüssigkeit im Verbindungsrohr wird vernachlässigt): $400 \cdot h + 900 \cdot h = 2000 \Rightarrow h = 1{,}54$ dm

9.16 V_1 und V_2 sind die Rauminhalte zweier Prismen, deren Grundflächen G_1 und G_2 Trapeze sind.
$G_1 = \frac{170+140}{2} \cdot 50 = 7750\ \text{mm}^2$;
$V_1 = G_1 \cdot 90 = 697{,}5\ \text{cm}^3$;
$\tan\alpha = \frac{30}{50} \Rightarrow \alpha = 30{,}96°$; $\cos\alpha = \frac{4}{x} \Rightarrow x = 4{,}66$ mm;
$a = 300 - 140 - x = 155{,}34$ mm;
$c = 300 - 170 - x = 125{,}34$ mm;
$G_2 = \frac{a+c}{2} \cdot 50 = 7016{,}8\ \text{mm}^2$; $V_2 = G_2 \cdot 90 = 631{,}5\ \text{cm}^3$



9.17 $M = 2\pi \cdot r \cdot h = 7539{,}8\ cm^2 \approx 75{,}4\ dm^2$;
$O = 2 \cdot G + M = \pi \cdot r^2 + 7539{,}8 = 10053{,}1\ cm^2 \approx 100{,}5\ dm^3$; $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 75398{,}2\ cm^3 \approx 75{,}4\ dm^3$

9.18 $r = 3{,}810\ cm = 0{,}81\ dm$; $h = 0{,}254\ dm$; $m = \rho \cdot V = \rho \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = 0{,}208\ kg = 208\ g$

9.19 $V = \pi \cdot r^2 \cdot 2r = 1\ m^3 = 1000\ dm^3 \Rightarrow r = 5{,}4\ dm$; Durchmesser = 10,8 dm

9.20 $1\ ml = 1\ cm^3 = 1000\ mm^3$; $\frac{\pi}{4} \cdot 30^2 \cdot h = 1000 \Rightarrow h = 1{,}41\ mm$

9.21 $d = 0{,}03\ dm$; $8{,}9 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot L \cdot 8{,}9 = 34{,}4 \Rightarrow L = 5468\ dm \approx 547\ m$

9.22 $\frac{\pi}{4} \cdot 5{,}8^2 \cdot 9{,}2 = \frac{\pi}{4} \cdot 18^2 \cdot h \Rightarrow h = 0{,}96\ cm$

9.23 $h = 3600 \cdot 0{,}5\ m = 1800\ m$; $V = \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}1^2 \cdot 1800 \approx 14{,}14\ m^3 = 14140$ Liter

9.24 1. Lösung: $u = 2\pi \cdot r = 10\ cm \Rightarrow r = \frac{10}{2\pi}$; $h = 5\ cm$, $V = \pi \cdot \frac{25}{\pi^2} \cdot 5 = 39{,}79\ cm^3 \approx 40\ cm^3$

2. Lösung: $u = 2\pi \cdot r = 5\ cm \Rightarrow r = \frac{5}{2\pi}$; $h = 10\ cm$, $V = \pi \cdot \frac{25}{4\pi^2} \cdot 10 = 19{,}89\ cm^3 \approx 20\ cm^3$

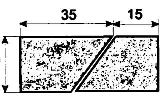
9.25 $\frac{\pi}{4} \cdot 8{,}2^2 \cdot h = 280 \Rightarrow h = 5{,}3\ cm = 53\ mm$

9.26 $m = \rho \cdot V$; $R = 0{,}75\ dm$, $r = 0{,}65\ dm$; $m = \pi \cdot (0{,}75^2 - 0{,}65^2) \cdot 40 \cdot 7{,}87 = 138{,}46\ kg \approx 138\ kg$

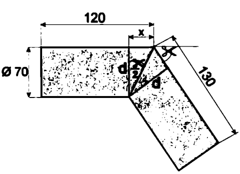
9.27 $A = 2{,}8 \cdot 1{,}6 - 2{,}48 \cdot 0{,}2 - \frac{\pi \cdot 1^2}{2} = 2{,}413\ dm^2$; $V = 2{,}413 \cdot 10 \approx 24{,}1\ dm^3$

9.28 Die Buchse besteht aus drei Hohlzylindern; der oberste und der unterste sind gleich.
$r_1 = 0{,}225\ dm$; $r_2 = 0{,}175\ dm$; $r_3 = 0{,}135\ dm$; $h_1 = \frac{0{,}4-0{,}3}{2} = 0{,}05\ dm$; $h_2 = 0{,}3\ dm$;
$V_1 = \pi \cdot (r_1^2 - r_3^2) \cdot h_1 = 0{,}00509\ dm^3$; $V_2 = \pi \cdot (r_2^2 - r_3^2) \cdot h_2 = 0{,}0117\ dm^3$;
$V = 2 \cdot V_1 + V_2 = 0{,}0219\ dm^3$; $m = \rho \cdot V = 8{,}5 \cdot 0{,}0219 = 0{,}186\ kg = 186\ g$

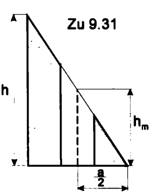
9.29 $M_1 = 2\pi \cdot r \cdot h_1 = 2\pi \cdot 10 \cdot \frac{35+15}{2} = 1570{,}8\ cm^2$; $M = 2 \cdot M_1 \approx 31{,}4\ dm^2$;
Lösungsvariante: Verdreht man den zweiten Zylinder (siehe Abbildung), so entsteht ein gerader Zylinder:
$M = 2\pi \cdot 10 \cdot 50 \approx 31{,}4\ dm^2$



9.30 $\alpha = 25°$; $d = 70\ cm$; $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{x}{d} \Rightarrow x = 15{,}52\ cm$;
$h_1 = \frac{120+(120-x)}{2} = 112{,}24\ cm$; $h_2 = \frac{130+(130-x)}{2} = 122{,}24\ cm$;
$M = 2\pi \cdot 35 \cdot h_1 + 2\pi \cdot 35 \cdot h_2 \approx 516\ dm^3$;
$V = \pi \cdot 35^2 \cdot h_1 + \pi \cdot 35^2 \cdot h_2 \approx 902\ dm^3$.
Lösungsvariante: Durch Verdrehen des zweiten Zylinders (wie in Aufgabe 9.29) kann ein gerader Zylinder erzeugt werden:
$M = 2\pi \cdot 35 \cdot (h_1 + h_2) \approx 516\ dm^2$; $V = \pi \cdot 35^2 \cdot (h_1 + h_2) \approx 902\ dm^3$



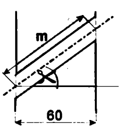
9.31 $h_m = 25\ cm$; $V = \frac{a \cdot h}{2} \cdot a - \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h_m = 27307\ mm^3 \approx 27{,}3\ cm^3$



9.32 $\cos\alpha = \frac{60}{m}$; $m = 72{,}373\ cm$

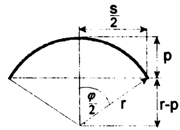
a) $M = \pi \cdot d \cdot m = 4547{,}3\ cm^2 \approx 45{,}5\ dm^2$

b) $M = 4 \cdot 20 \cdot m = 5790\ cm^2 \approx 58\ dm^2$



9.33 $O = \pi \cdot 410^2 - \pi \cdot 80^2 + \pi \cdot 410 \cdot 120 = 662562\ \text{mm}^2 \approx 66{,}3\ \text{dm}^2$

9.34 $r^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + (r-p)^2 \quad \Rightarrow \quad r = 3{,}988\ \text{m}\,; \quad r_m = r + \frac{d}{2} = 4{,}308\,\text{m}$



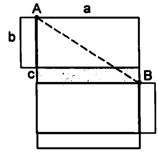
$\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{s/2}{r-p} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 87{,}21°\,; \quad b_m = r_m \cdot \varphi \cdot \frac{\pi}{180°} = 6{,}556\,\text{m}\,;$

$V = b_m \cdot d \cdot l = 26{,}01\ \text{m}^3;$

Masse $m = \rho \cdot V = 2300 \cdot V = 59834\ \text{kg} \approx 59{,}8\ \text{t}$

9.35 Die Oberfläche eben abwickeln und dann A und B geradlinig verbinden.

$d = \sqrt{a^2 + (b+c)^2} = 850\ \text{mm}$



Zu 9.35

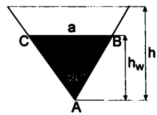
9.36 Das Dreieck ABC ist gleichseitig.

$h_W = 0{,}75 \cdot h = 60\ \text{cm};$

$h_W = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2 \cdot h_W}{\sqrt{3}} = 69{,}28\ \text{cm};$

Flächeninhalt A des Dreiecks ABC:

$A = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} = 2078{,}5\ \text{cm}^2 = 20{,}785\ \text{dm}^2;$



Zu 9.36

a) Wassermenge pro Meter: $V = 10\ \text{dm} \cdot A \approx 208\ \text{dm}^3 = 208\ l$.

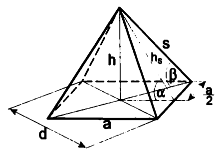
b) Länge des "Wasserprismas" pro Stunde: $3600 \cdot 0{,}5\ \text{m} = 1800\ \text{m}$;

$$V = A \cdot 1800\ \text{m} = 0{,}20785\ \text{m}^2 \cdot 1800\ \text{m} = 374{,}12\ \text{m}^3 = \frac{10^2}{4} \cdot \pi \cdot h \quad \Rightarrow h = 4{,}76\ \text{m}$$

9.37 a) $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot 25 = 3200\ \text{cm}^3 \quad \Rightarrow \quad a = 19{,}6\,\text{cm}\,;$

$d = a \cdot \sqrt{2} = 27{,}7\,\text{cm}\,; \quad s = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2} = 28{,}6\,\text{cm}\,;$

$h_S = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2} = 26{,}85\ \text{cm}\,; \quad O = 2 \cdot a \cdot h_S + a^2 \approx 14{,}4\ \text{dm}^2$



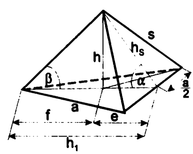
b) $\tan\alpha = \frac{h}{a/2} \rightarrow \alpha = 68{,}6°$ c) $\tan ß = \frac{h}{d/2} \rightarrow ß = 61{,}0°$

9.38 a) Grundfläche $G = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ (gleichseitiges Dreieck);

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{5{,}8^2}{4}\sqrt{3} \cdot h = 72 \quad \Rightarrow \quad h = 14{,}8\ \text{cm}; \quad h_1 = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} = 5{,}02\ \text{cm};$

$f = \frac{2}{3} \cdot h_1 = 3{,}35\ \text{cm}; \ e = \frac{1}{3} \cdot h_1 = 1{,}67\ \text{cm}; \quad s = \sqrt{f^2 + h^2} = 15{,}2\ \text{cm};$

$h_S = \sqrt{e^2 + h^2} = 14{,}9\ \text{cm}; \ O = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_S + \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = 144{,}4\ \text{cm}^2$

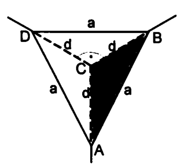


b) $\tan\alpha = \frac{h}{e} \rightarrow \alpha = 83{,}6°$ c) $\tan ß = \frac{h}{f} \rightarrow ß = 77{,}3°$

9.39 Der an einer Ecke wegfallende Körper ist eine schiefe Pyramide mit der Grundfläche ABC und der Spitze D.

$d^2 + d^2 = a^2 \Rightarrow d = \frac{a}{\sqrt{2}}; \ G = \frac{d \cdot d}{2} = \frac{a^2}{4}; \ V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^3}{12 \cdot \sqrt{2}} = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{24}$

pro Ecke, insgesamt $4 \cdot V = \frac{a^3}{6}\sqrt{2} \approx 795\ \text{mm}^3$



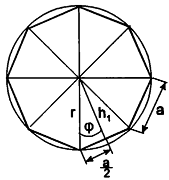
9.40 $\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{360°}{8} = 22{,}5°$;

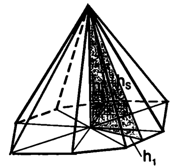
$\tan\varphi = \frac{a/2}{h_1} \Rightarrow h_1 = 2{,}414\,\text{m}$;

$h_S = \sqrt{h^2 + h_1^2} = 4{,}672\,\text{m}$;

$M = 8 \cdot \frac{a \cdot h_S}{2} = 37{,}38\,\text{m}^2$;

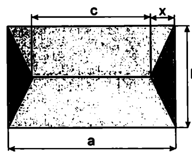
10% *davon* ist Verschnitt, Blechbdearf
daher $37{,}38 \cdot 1{,}10 \approx 41{,}1\ \text{m}^2$





9.41 $h = 6{,}0$ m; $x = 2{,}5$ m; $a = 15{,}0$ m; $b = 1{,}0$ m; $c = 10{,}0$ m;
Dreiseitiges Prisma in der Mitte sowie zwei schiefe Pyramiden der Höhe h an den beiden Seiten:

$$V = \frac{b \cdot c}{2} \cdot h + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot b \cdot x \cdot h = 400\ \text{m}^3$$

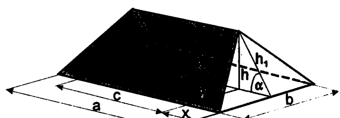


9.42 $\tan\beta = \frac{h}{b/2} \Rightarrow h = \frac{b}{2} \cdot \tan\beta$; $\tan\alpha = \frac{h}{x} \Rightarrow$

$x = \frac{h}{\tan\alpha} = \frac{b}{2} \cdot \frac{\tan\beta}{\tan\alpha}$; $c = a - 2x = a - b \cdot \frac{\tan\beta}{\tan\alpha}$;

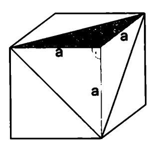
$$V = \frac{b \cdot h}{2} \cdot c + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot b \cdot x \cdot h = \frac{b \cdot h}{6} \cdot (3c + 4x) =$$

$$= \frac{b}{6} \cdot \frac{b}{2} \cdot \tan\beta \cdot \left(3a - 3b \cdot \frac{\tan\beta}{\tan\alpha} + 2b \cdot \frac{\tan\beta}{\tan\alpha}\right) = \frac{1}{12} \cdot b^2 \cdot \tan\beta \cdot \left(3a - b \cdot \frac{\tan\beta}{\tan\alpha}\right) = 777\ \text{m}^3$$



9.43 Die wegfallende Ecke ist eine schiefe Pyramide mit der Grundfläche $G = \frac{1}{2} \cdot a^2$ und der Höhe a: $V_{\text{Ecke}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot a = \frac{1}{6} \cdot a^3$;

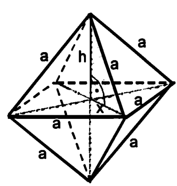
$V_{\text{Rest}} = a^3 - \frac{1}{6} \cdot a^3 = \frac{5}{6} \cdot a^3$



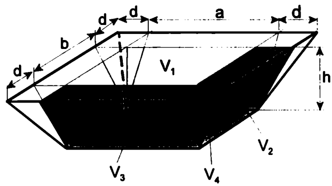
9.44 Oktaeder: Zwei gerade quadratische Pyramiden der Grundfläche $G = a^2$ und der Höhe h; $x = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{2}$ (halbe Diagonale der quadratischen Grundfläche); $h^2 + x^2 = a^2 \Rightarrow h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{2}$;

$$V = 2 \cdot G \cdot h = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{a^3}{3} \cdot \sqrt{2};$$

$$O = 8 \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} = 2 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}$$



9.45 Der Gesamtkörper setzt sich aus einem Quader, zwei dreiseitigen Prismen der Höhe a, zwei dreiseitigen Prismen der Höhe b sowie vier schiefen Pyramiden der Höhe h zusammen.



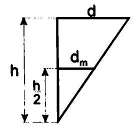
$h = 2{,}5$ m; $h : d = 2{,}5 \cdot 1{,}5 \Rightarrow d = 1{,}5$ m;

$V_1 = a{\cdot}b{\cdot}h = 15{\cdot}12{\cdot}2{,}5 = 450\ m^3$;

$V_2 = \frac{1}{2}\cdot d\cdot h\cdot b = 22{,}5\ m^3$;

$V_3 = \frac{1}{2}\cdot d\cdot h\cdot a = 28{,}125\ m^3$

$V_4 = \frac{1}{3}\cdot d^2\cdot h = 1{,}875\ m^3$;



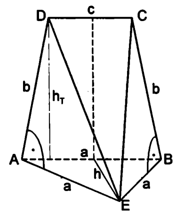
Aushubvolumen $V = V_1 + 2{\cdot}V_2 + 2{\cdot}V_3 + 4{\cdot}V_3 = 558{,}75 \approx 559\ m^3$.

Näherung: $h : d = \frac{h}{2} : d_m \Rightarrow d_m = \frac{d}{2} = 0{,}75$ m; Länge und Breite der Grube in halber Tiefe: $a_m = a + 2{\cdot}d_m = 16{,}5$ m; $b_m = b + 2{\cdot}d_m = 13{,}5$ m;

$V_{Näh} = Q{\cdot}h = a_m{\cdot}b_m{\cdot}h = 556{,}875 \approx 557\ m^3$; absoluter Fehler: $2\ m^3$, relativer Fehler: $\frac{V_{Näh} - V}{V} = -0{,}0034 = 0{,}34\%$.

Der Aushubkörper ist ein Pyramidenstumpf. Damit ist eine einfachere Lösung möglich (Lehrbuch S. 307).

9.46 Schiefe Pyramide mit Grundfläche ABCD (Trapez) und der Höhe h;

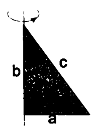


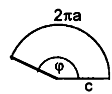
Trapezhöhe $h_T = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2} = 17{,}83\,\text{cm}$;

Grundfläche $G = \frac{a+c}{2}{\cdot}h_T = 222{,}8\ cm^2$; Pyramidenhöhe h = Höhe im gleichseitigen Dreieck mit der Seite a: $h = \frac{a}{2}\cdot\sqrt{3} = 12{,}99$ cm;

$V = \frac{1}{3}\cdot G\cdot h = 964{,}8\ cm^3 = 0{,}9648\ dm^3$; $m = \rho{\cdot}V = 7{,}85{\cdot}V \approx 7{,}75$ kg

9.47 a Radius, b Höhe, c Mantellinie des Kegels; Bogen = Umfang des Basiskreises; $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 17$ cm;



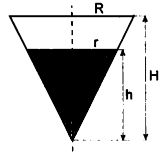


$V = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot a^2\cdot b \approx 1005\ cm^3$; $O = \pi\cdot a\cdot(a + c) \approx 628\ cm^2$

$\frac{\pi\cdot c\cdot\varphi}{180°} = 2\pi\cdot a \Rightarrow \varphi = 169{,}4°$

9.48 Halbkreislänge $\frac{20}{2}\cdot\pi$ = Umfang des Basiskreises; Radius des Halbkreises ist Mantellinie des Kegels; $10\pi = 2\pi{\cdot}r_{Kegel} \Rightarrow r_{Kegel} = 5$ cm; $h = \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\cdot\sqrt{3}$; $V = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 5^2\cdot h \approx 227\ cm^3$

9.49 R und H sind Radius und Höhe des vollgefüllten Kegels (Volumen V), r und h Radius und Höhe des Kegels mit halbem Volumen V_h.



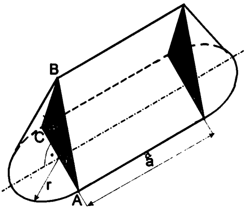
$V = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot R^2\cdot H$; ähnliche Dreiecke oder 2. Strahlensatz:

$h : H = r : R \Rightarrow r = \frac{h}{H}\cdot R$; $V_h = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\left(\frac{h}{H}\cdot R\right)^2\cdot h$;

$V_h = \frac{1}{2}\cdot V \Rightarrow h = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot H = 0{,}794{\cdot}H \approx 80\%$ von H

9.50 a) $r = \dfrac{h}{\tan\alpha}$; $V = \dfrac{1}{3}\cdot\pi\dfrac{h^3}{\tan^2\alpha}$ b) $h = \sqrt[3]{\dfrac{3V\cdot\tan^2\alpha}{\pi}} \approx 1{,}8$ m

9.51 Dachkörper setzt sich aus einem dreiseitigen Prisma mit der Grundfläche G und Höhe a sowie zwei Halbkegeln, die zusammen gerade einen Kegel mit dem Radius r und der Höhe h ergeben. ABC gleichseitiges Dreieck mit Seite 2r;



$G = \dfrac{(2r)^2}{4}\cdot\sqrt{3}$; $h = \dfrac{2r}{2}\cdot\sqrt{3} = r\cdot\sqrt{3}$;

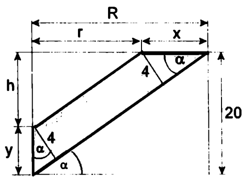
$O_1 = 2{\cdot}2r{\cdot}a = 300\ m^2$; Kegelmantel $O_2 = \pi{\cdot}r{\cdot}2r{=}157{,}08\ m^2$;

Dachfläche $O = O_1 + O_2 \approx 457\ m^2$;

$V_1 = G{\cdot}a = 649{,}5\ m^3$; $V_2 = \dfrac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h = 226{,}7\ m^3$;

Dachvolumen $V = V_1 + V_2 \approx 876\ m^3$

9.52 Das gesuchte Volumen ist die Differenz zweier Kegelvolumen; $\alpha = 35°$;



$\tan\alpha = \dfrac{20}{R} \Rightarrow R = \dfrac{20}{\tan\alpha} = 28{,}563$; $\sin\alpha = \dfrac{4}{x} \Rightarrow$

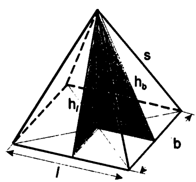
$x = \dfrac{4}{\sin\alpha} = 6{,}974$; $\cos\alpha = \dfrac{4}{y} \Rightarrow y = \dfrac{4}{\cos\alpha} = 4{,}883$;

$r = R - x = 21{,}589$; $h = 20 - y = 15{,}117$

$V = \dfrac{1}{3}\cdot\pi\cdot\left(R^2\cdot 20 - r^2\cdot h\right) \approx 9709\ mm^3 \approx 9{,}7\ cm^3$

9.53 a) $l = 3k$; $b = 2k$; $s = 8k$; $168 = 2l + 2b + 4s = 42k \Rightarrow k = 4$; $l = 12$ cm; $b = 8$ cm; $s = 32$ cm

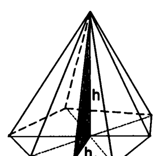
b) $h_l^2 = s^2 - (l/2)^2 \Rightarrow h_l = 31{,}43$ cm;
$h_b^2 = s^2 - (b/2)^2 \Rightarrow h_b = 31{,}75$ cm;
$O = l{\cdot}b + 2{\cdot}0{,}5{\cdot}h_l{\cdot}l + 2{\cdot}0{,}5{\cdot}h_b{\cdot}b = 727{,}18\ cm^2$;
zusätzlich *davon* 20% als Verschnitt ergibt den Papierbedarf:
$727{,}18{\cdot}1{,}2 \approx 873\ cm^2 = 8{,}73\ dm^2$



9.54 r Kegelradius, Mantellinie des Kegels: s 20 cm; $2\pi\cdot r = \dfrac{3}{4}\cdot 40\pi \Rightarrow r = 15$ cm;

$h = \sqrt{s^2 - r^2} = 5\cdot\sqrt{7}$; $V = \dfrac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h = 3117\ cm^3 \approx 3{,}1\ dm^3$; $\tan\alpha = \dfrac{h}{r} \Rightarrow \alpha = 41{,}4°$

9.55 Die Grundfläche ist ein regelmäßiges Sechseck, das aus 6 gleichseitigen Dreiecken mit der Seitenlänge r besteht.



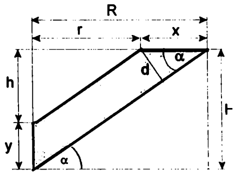
a) $G = 6\cdot\dfrac{r^2}{4}\cdot\sqrt{3}$; $V_{Pyramide} = \dfrac{1}{3}\cdot G\cdot h = 3741\ cm^3$;

$V_{Kegel} = \dfrac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h = 4524\ cm^3$; Materialverlust: 783 cm^3 oder 17,3%

b) $h_1 = \dfrac{r}{2}\cdot\sqrt{3}$ (Höhe in einem gleichseitigen Dreieck);

$\tan\alpha = \dfrac{h}{h_1} \Rightarrow \alpha = 70{,}9°$

9.56 R =50 mm, H = 150 mm, Radius und Höhe des äußeren Kegels; r, h Radius und Höhe des inneren Kegels.



Ähnlichkeit: $R : H = r : h \Rightarrow h = \frac{r}{R}\cdot H = 3r$; $r = 50 - x$;

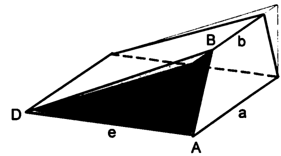
$h = 3\cdot(50\text{-}x)$; $\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot R^2\cdot H$ oder eingesetzt und

etwas vereinfacht: $(50 - x)^2\cdot 3\cdot(50 - x) = \frac{1}{2}\cdot 50^2\cdot 150$

$\Rightarrow x = 10{,}315$; $\tan\alpha = \frac{H}{R} = 3 \Rightarrow \alpha = 71{,}6°$; $\sin\alpha = \frac{d}{x} \Rightarrow$

Wandstärke des Hohlkegels $d = x\cdot\sin\alpha = 9{,}8$ mm

9.57 Vorgangsweise: Von einem dreiseitigen Prisma mit der Grundfläche ACD und der Höhe a werden zwei schiefe Pyramiden mit der Grundfläche ABC und der Höhe e weggenommen. $h : e = 0{,}1 \Rightarrow e = 16$ m;

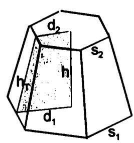


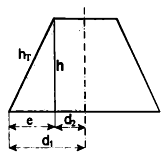
$V_{Prisma} = \frac{e\cdot h}{2}\cdot a = 51{,}2\ m^3$;

$V_{Pyramide} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a-b}{2}\cdot h\cdot e = 3{,}2\ m^3$;

Materialbedarf $V = V_{Prisma} - 2\cdot V_{Pyramide} = 44{,}8\ m^3$

9.58 $A_{6\text{-}Eck} = 6\cdot\frac{s^2}{4}\cdot\sqrt{3}$; $G_1 = 6\cdot\frac{s_1^2}{4}\cdot\sqrt{3} = 166{,}28\ cm^2$;





$G_2 = 6\cdot\frac{s_2^2}{4}\cdot\sqrt{3} = 64{,}95\ cm^2$;

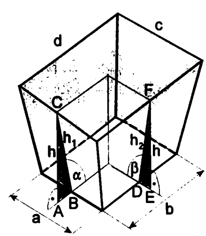
$V = \frac{15}{3}\cdot\left(G_1 + \sqrt{G_1\cdot G_2} + G_2\right) = 1676\ cm^3$;

die Seitenflächen sind Trapeze; d_1 und d_2 sind Höhen in gleichseitigen Dreiecken der Seiten s_1 bzw. s_2: $d_1 = \frac{8}{2}\cdot\sqrt{3} = 6{,}928$ cm; $d_2 = \frac{5}{2}\cdot\sqrt{3} = 4{,}330$ cm; $e = d_1 - d_2 = 2{,}598$ cm;

$h_T = \sqrt{e^2 + h^2} = 15{,}223$ cm; $A_T = \frac{s_1+s_2}{2}\cdot h = 98{,}95\ cm^2$; $O = G_1 + G_2 + 6\cdot A_T \approx 825\ cm^2$

9.59 a) $G_1 = a\cdot b = 20\ dm^2$; $G_2 = c\cdot d = 45\ dm^2$;

$V = \frac{h}{3}\cdot\left(G_1 + \sqrt{G_1\cdot G_2} + G_2\right) \approx 253\ dm^3$



b) $a_m = \frac{a+c}{2} = 5$ dm; $b_m = \frac{5+7{,}5}{2} = 6{,}25$ dm; $G_m = 31{,}25\ dm^2$;

$V_m = \frac{h}{6}\cdot\left(G_1 + \sqrt{G_1\cdot G_m} + G_m\right) \approx 102\ dm^3$

c) Dreieck ABC: $\tan(180° - \alpha) = \frac{h}{(d-b)/2} \Rightarrow \alpha = 98{,}9°$;

Dreieck DEF: $\tan(180° - \beta) = \frac{h}{(c-a)/2} \Rightarrow \beta = 97{,}1°$

d) Dreieck ABC: $((d-b)/2)^2 + h^2 = h_1^2 \Rightarrow h_1 = 8{,}097$ dm; Dreieck DEF: $((c-a)/2)^2 + h^2 = h_2^2$

$\Rightarrow h_2 = 8{,}062$ dm; Trapezfläche $T_1 = \frac{a+c}{2}\cdot h_1 = 40{,}485\ dm^2$;

Trapezfläche $T_2 = \frac{b+d}{2}\cdot h_2 = 50{,}389\ dm^2$; Innenfläche $A = G_1 + 2\cdot T_1 + 2\cdot T_2 = 201{,}75 \approx 202\ dm^2$

9.60 a) $\tan\alpha = \frac{h}{d} \Rightarrow d = 1{,}510\text{ m};\ b = a - 2d = 0{,}479\text{ m};$

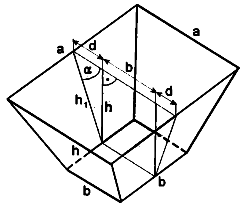
$G_1 = b^2;\ G_2 = a^2;$

$V = \frac{h}{3}\cdot\left(G_1 + \sqrt{G_1 \cdot G_2} + G_2\right) \approx 8{,}49\text{ m}^3$

b) $h_1 = \sqrt{d^2 + h^2} = 2{,}350\text{ m};$

trapezförmige Seitenfläche: $T = \frac{a+b}{2}\cdot h_1 = 4{,}675\text{ m}^2;$

Blechbedarf $A = G_1 + 4\cdot T \approx 18{,}9\text{ m}^3$



9.61 Der Schacht setzt sich aus einem oberen Kegelstumpf, einem Zylinder und einem unteren Kegelstumpf zusammen: $V_1 = \frac{\pi\cdot 75}{3}\cdot\left(100^2 + 100\cdot 62{,}5 + 62{,}5^2\right) = 1583068\text{ mm}^3;$

$V_2 = \pi\cdot 62{,}5^2\cdot 175 = 2147573\text{ mm}^3;\ V_3 = \frac{\pi\cdot 75}{3}\cdot\left(62{,}5^2 + 62{,}5\cdot 27{,}5 + 27{,}5^2\right) = 501182\text{ mm}^3;$

$V = V_1 {}^{+} V_2 + V_3 = 4231823\text{ mm}^3 \approx 4{,}23\text{ dm}^3$

9.62 $V = \frac{\pi\cdot 900}{3}\cdot\left(37{,}5^2 + 37{,}5\cdot 30 + 30^2\right) = 3233877\text{ cm}^3 \approx 3{,}23\text{ m}^3;$

$V_N \approx \pi\cdot 900\cdot\left(\frac{37{,}5+30}{2}\right)^2 = 3220623\text{ cm}^3 \approx 3{,}22\text{ m}^3;$ rel. Fehler: $\frac{V_N - V}{V} = -0{,}0041 = -0{,}41\%$

9.63 Der Bolzenkörper setzt sich aus einem Kegelstumpf, einem Zylinder und einem weiteren Kegelstumpf zusammen: $V_1 = \frac{\pi\cdot 30}{3}\cdot\left(15^2 + 15\cdot 29 + 29^2\right) = 47155\text{ mm}^3;$

$V_2 = \pi\cdot 21^2\cdot 90 = 124690\text{ mm}^3;\ V_3 = \frac{\pi\cdot 16}{3}\cdot\left(21^2 + 21\cdot 15 + 15^2\right) = 16437\text{ mm}^3;$

$V = V_1 {}^{+} V_2 + V_3 = 188282\text{ mm}^3 = 0{,}188282\text{ dm}^3;\ m = \rho\cdot V = 7{,}85\cdot 0{,}188282 \approx 1{,}48\text{ kg}$

9.64 a) $r_1 = 37{,}5\text{ cm};\ r_2 = 17{,}5\text{ cm};\ h = 42\text{ cm};$

$s = \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + h^2} = 46{,}52\text{ cm};$

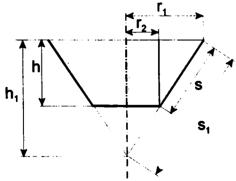
$G = \pi\cdot r_2{}^2 = 962{,}1\text{ cm}^2;\ M = \pi\cdot s\cdot(r_1 + r_2) = 8037{,}9\text{ cm}^2;$

$O = G + M = 9000\text{ cm}^2 = 90{,}0\text{ dm}^2$

b) Ähnlichkeit oder 2. Strahlensatz:

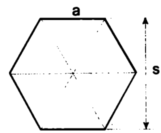
$s : s_1 = (r_1 - r_2) : r_1 \Rightarrow s_1 = 87{,}22\text{ cm};$

$2\pi\cdot r_1 = \frac{\pi\cdot s_1\cdot\omega}{180°} \Rightarrow \omega = 154{,}8°$



9.65 Betonmast: Pyramidenstumpf, aus dem man innen einen Kegelstumpf wegnimmt. Höhe h in beiden Fällen 720 cm.

Pyramidenstumpf: $\frac{s}{2}$ ist die Höhe im gleichs. Dreieck, damit kann die Dreiecksseite a errechnet werden: $\frac{s}{2} = \frac{a}{2}\cdot\sqrt{3} \Rightarrow a = \frac{s}{\sqrt{3}};$



somit: $a_1 = \frac{s_1}{\sqrt{3}} = 103{,}92\text{ cm};\ a_2 = \frac{s_2}{\sqrt{3}} = 51{,}96\text{ cm};$

$G_1 = 6\,\frac{a_1^2}{4}\sqrt{3} = 28059\text{ cm}^2;\ G_2 = 6\,\frac{a_2^2}{4}\sqrt{3} = 7015\text{ cm}^2; V_1 = \frac{h}{3}\cdot\left(G_1 + \sqrt{G_1 G_2} + G_2\right) = 11785\text{ dm}^3$

Kegelstumpf: $r_1 = 60\text{ cm};\ r_2 = 20\text{ cm};\ V_2 = \frac{\pi\cdot h}{3}\cdot\left(r_1^2 + r_1\cdot r_2 + r_2^2\right) = 3921\text{ dm}^3;$

$V = V_1 - V_2 = 7864\text{ dm}^3 \approx 7{,}86\text{ m}^3$

9.66 a) $\frac{4\pi}{3} \cdot r^3 = 1\,m^3 \Rightarrow r = 0{,}620\text{ m} = 62{,}0\text{ cm}$ b) $4\pi \cdot r^2 = 1\text{ m}^2 \Rightarrow r = 0{,}282\text{ m} = 28{,}2\text{ cm}$

9.67 $V_{Kugel} : V_{Zylinder} : V_{Kegel} = \frac{4\pi}{3} \cdot r^3 : \pi \cdot r^2 \cdot 2r : \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 2r = 4 : 6 : 2 = 2 : 3 : 1$

9.68 r Radius der inneren Kugel, R Radius der äußeren Kugel:
$\frac{4\pi}{3} \cdot r^3 = 1\text{ dm}^3 \Rightarrow r = 0{,}6204\text{ dm} = 62{,}04\text{ mm}$; $R = r + 3\text{ mm} = 65{,}04\text{ mm}$;
Durchmesser der äußeren Kugel $2 \cdot R \approx 130{,}1\text{ mm}$

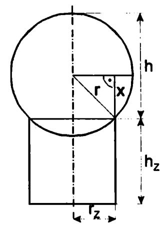
9.69 r Radius der inneren Kugel, R Radius der äußeren Kugel: $R = 50\text{ mm} = 0{,}50\text{ dm}$,
$r = 49\text{ mm} = 0{,}49\text{ dm}$; $m = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot (R^3 - r^3) = 0{,}263\text{ kg} = 263\text{ g}$

9.70 Auftrieb = Gewicht der vom Ballon verdrängten Luft: $F_{GLuft} = \rho_{Luft} \cdot V \cdot g$;
$V = \frac{\pi}{6} \cdot 10^3 = 523{,}6\text{ m}^3$; $F_{GLuft} = 1293\text{ kg/m}^3 \cdot 0{,}5236\text{ m}^3 \cdot 9{,}81\text{ m/s}^2 = 6642\text{ kg m s}^{-2} = 6642\text{ N}$;
Gewicht des Ballons (ohne Hülle): $F_{GWasserstoff} = 90\text{ kg/m}^3 \cdot 523{,}6\text{ m}^3 \cdot 9{,}81\text{ m/s}^2 = 462\text{ N}$;
nach oben wirkende Kraft Differenz: $F_{GLuft} - F_{GWasserstoff} = 6179\text{ N} \approx 6{,}18\text{ kN}$

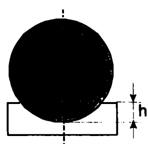
9.71 $m = \rho \cdot V = 0{,}25\text{ kg/dm}^3 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot 10^3\text{ dm}^3 \approx 131\text{ kg}$

9.72 d Innendurchmesser, D Außendurchmesser; $d = D - 0{,}4\text{ cm}$; $\frac{\pi}{6} \cdot \left[D^3 - (D-0{,}4)^3\right] = 50$;
$D^3 - (D-0{,}4)^3 = D^3 - (D^3 - 3 \cdot D^2 \cdot 0{,}4 + 3D \cdot 0{,}4^2 - 0{,}4^3) = 3 \cdot D^2 \cdot 0{,}4 - 3D \cdot 0{,}4^2 + 0{,}4^3$;
$\frac{\pi}{6} \cdot (3 \cdot D^2 \cdot 0{,}4 - 3D \cdot 0{,}4^2 + 0{,}4^3 = 50$ oder $d^2 - 0{,}4 \cdot d - 79{,}5241 = 0$, quadratische Gleichung,
$D_1 = 9{,}12\text{ cm}$, $D_2 = -8{,}72$ sachlich nicht sinnvoll, Außendurchmesser daher 91,2 mm

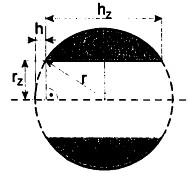
9.73 $r = 15\text{ mm}$; $r_Z = 7\text{ mm}$; $x = \sqrt{r^2 - r_Z^2} = 13{,}27\text{ mm}$;
$h = r + x = 28{,}27\text{ mm}$; $h_Z = 65 - h = 36{,}73$;
Volumen des Kugelabschnittes
$$V_K = \frac{\pi \cdot h^2}{6} \cdot (3 \cdot r - h) = 14001\text{ mm}^3;$$
Volumen des Zylinders $V_Z = \pi \cdot r_Z^2 \cdot h_Z = 5655\text{ mm}^3$;
$V = V_K + V_Z = 19656\text{ mm}^3 =$;
$m = \rho \cdot V = 7{,}85\text{ kg/dm}^3 \cdot 0{,}019656\text{ dm}^3 \approx 0{,}154\text{ kg} = 154\text{ g}$



9.74 $h = 5\text{ mm}$; $A_{Kappe} = 2\pi \cdot r \cdot h = 640\text{ mm}^2 \Rightarrow r = 20{,}4\text{ mm}$

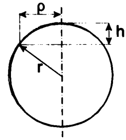


9.75 Bohrung: Zylinder mit zusätzlich zwei gleich großen Kugelabschnitten; $r = 4{,}25\text{ cm}$; $r_Z = 0{,}7\text{ cm}$; $r - h = \sqrt{r^2 - r_Z^2} \Rightarrow$
$h = r - \sqrt{r^2 - r_Z^2} = = 0{,}0580\text{ cm}$; $h_Z = 2 \cdot r - 2 \cdot h = 8{,}384\text{ cm}$;
Bohrung: $V_B = \pi \cdot r_Z^2 \cdot h_Z + 2 \cdot \frac{\pi \cdot h^2}{3} \cdot (3 \cdot r - h) = 12{,}996\text{ cm}^3$;
Kugel: $V_{Kugel} = \frac{4\pi}{3} \cdot r^3 = 321{,}555\text{ cm}^3$; Restkörper $V_{Rest} \approx 309\text{ cm}^3$



9.76 $r = 60$ cm; $\rho = 40$ cm; $r^2 = \rho^2 + (r-h)^2 \Rightarrow h^2 - 120 \cdot h + 1600 = 0$, quadratische Gleichung, $h_1 = 15{,}28$ cm; die zweite Lösung $h_2 = 104{,}72$ bezieht sich auf den unteren größeren Kugelabschnitt, der hier gerade gefragt ist:

$$V = \frac{\pi \cdot h_2^2}{3} \cdot (3 \cdot r - h_2) \approx 864512\ \text{cm}^3 \approx 865\ \text{dm}^3$$

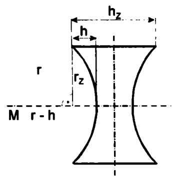


9.77 Linsenkörper: Zylinder (r_Z, h_Z) abzüglich zwei Kugelabschnitte (r, h);
$r_Z = 45$ mm; $h_Z = 28$ mm; $r = 170$ mm;

$$r - h = \sqrt{r^2 - r_Z^2} \Rightarrow h = r - \sqrt{r^2 - r_Z^2} = 6{,}06\ \text{mm};$$

$$V = \pi \cdot r_Z^2 \cdot h_Z - 2 \cdot \frac{\pi \cdot h^2}{3} \cdot (3r - h)) = 139317\ \text{mm}^3 = 0{,}139317\ \text{kg};$$

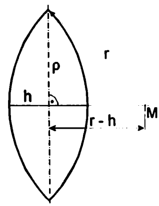
$$m = \rho \cdot V = 3{,}3 \cdot V \approx 0{,}46\ \text{kg} = 46\ \text{dag}$$



9.78 Linsenkörper: Zwei Kugelkappen mit $\rho = 50$ mm und $h = 5$ mm;

Kigelradius r: $r^2 = (r-h)^2 + \rho^2 \Rightarrow r = \dfrac{h^2 + \rho^2}{2h} = 252{,}5$ mm;

$A = 2 \cdot 2 \cdot r \cdot h = 15865\ \text{mm}^2 \approx 159\ \text{cm}^2$

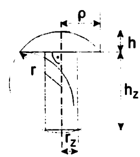


9.79 Bolzenkörper: Kugelabschnitt (r, h) und Zylinder (r_Z, h_Z);
$r = 18$ mm; $\rho = 17{,}5$ mm; $r_Z = 10$ mm;

$$r - h = \sqrt{r^2 - \rho^2} \Rightarrow h = r - \sqrt{r^2 - \rho^2} = 13{,}79\ \text{mm};\ h_Z = 65 - h51{,}21\ \text{mm};$$

$$V = \frac{\pi \cdot h^2}{3} \cdot (3r - h) + \pi \cdot r_Z^2 \cdot h_Z = 24093\ \text{mm}^3 = 0{,}024093\ \text{dm}^3;$$

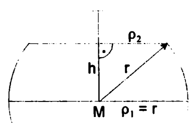
$$m = \rho \cdot V = 7{,}85 \cdot V = 0{,}189\ \text{kg} = 189\ \text{g}$$



9.80 $h = 5$ cm; $\rho_1 = r$; $A = 2\pi \cdot r \cdot h = 10\pi \cdot r = 600 \Rightarrow r = 19{,}10$ cm;

$$r^2 = h^2 + \rho_2^2 \Rightarrow \rho_2 = 18{,}43\ \text{cm};$$

$$V_{\text{Kugelschicht}} = \frac{\pi \cdot h}{6} \cdot \left(3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + h^2\right) = 5598{,}7\ \text{cm}^3 \approx 5{,}60\ \text{dm}^3$$



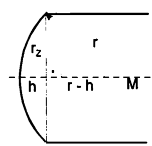
9.81 $h = 3$ cm; $2\pi \cdot r \cdot h = 95 \Rightarrow r = 5{,}040$ cm; $V = \dfrac{\pi \cdot h}{3} \cdot (3r - h)) \approx 114\ \text{cm}^3$

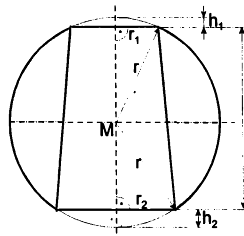
9.82 Zylinder (r_Z, h_Z) und zusätzlich zwei Kugelabschnitte (r, h);
$r = 150$ cm; $r_Z = 60$ mm; $h_Z = 240$ cm; $r - h = \sqrt{r^2 - r_Z^2}$

$$\Rightarrow h = r - \sqrt{r^2 - r_Z^2} = 12{,}52\ \text{cm};$$

$$V = \pi \cdot r_Z^2 \cdot h_Z + 2 \cdot \frac{\pi \cdot h^2}{3} \cdot (3r - h) = 2858021\ \text{cm}^3 \approx 2{,}86\ \text{m}^3;$$

$$O = 2\pi \cdot r_Z \cdot h_Z + 2 \cdot 2\pi \cdot r \cdot h = 114083\ \text{cm}^2 \approx 11{,}4\ \text{m}^2$$





9.83 Restkörper: Kugel abzüglich ein Kegelstumpf und zwei Kugelabschnitte;

$r = 30$ mm; $r_1 = 12$ mm; $r_2 = 17$ mm;

$r - h_1 = \sqrt{r^2 - r_1^2} \Rightarrow h_1 = r - \sqrt{r^2 - r_1^2} = 2{,}505$ mm;

$r - h_2 = \sqrt{r^2 - r_2^2} \Rightarrow h_2 = r - \sqrt{r^2 - r_2^2} = 5{,}282$ mm;

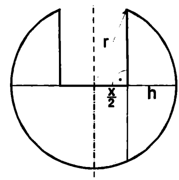
$h = 2r - h_1 - h_2 = 52{,}214$ mm;

$V_{Kegelstumpf} = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot \left(r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2\right) = 34830{,}0\ \text{mm}^3;$

$V_{Kugelabschnitt1} = \frac{\pi \cdot h_1^2}{3} \cdot (3 \cdot r - h_1) = 574{,}7{,}0\ \text{mm}^3;$

$V_{Kugelabschnitt2} = \frac{\pi \cdot h_2^2}{3} \cdot (3 \cdot r - h_2) = 2474{,}8\ \text{mm}^3;$ $V_{Kugel} = \frac{4\pi}{3} \cdot r^3 = 113097{,}3\ \text{mm}^3;$

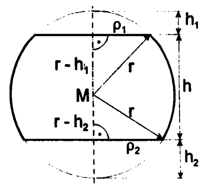
$V = V_{Kugel} - V_{Kegelstumpf} - V_{Kugelabschnitt1} - V_{Kugelabschnitt2} = 75217{,}8\ \text{mm}^3 \approx 75{,}2\ \text{cm}^3$



9.84 Restkörper: Halbkugel und zwei halbe Kugelabschnitte (r, h);

$r = 35$ mm; $h = r - \frac{x}{2} = 22{,}5$ mm;

$V = \frac{2\pi}{3} \cdot r^3 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi \cdot h^2}{3} \cdot (3r - h) = 133534\ \text{mm}^3 \approx 134\ \text{cm}^3$



9.85 Restkörper: Kugelschicht

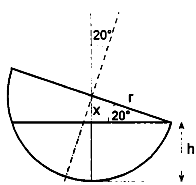
$r = 30$ mm; $\rho_1 = 20$ mm; $h = 40$ mm;

$r - h_1 = \sqrt{r^2 - \rho_1^2} \Rightarrow h_1 = r - \sqrt{r^2 - \rho_1^2} = 76{,}39$ mm;

$h_2 = 2r - h_1 - h = 12{,}36$ mm;

$\rho_2^2 + \left(r - h_2^2\right)^2 = r^2 \Rightarrow \rho_2 = 24{,}27$ mm;

$V = \frac{\pi \cdot h}{6} \cdot \left(3\rho_1^2 + 3\rho_1^{2\prime} + h^2\right) = 95642\ \text{mm}^3 \approx 95{,}6\ \text{cm}^3$



9.86 $V_{ausfließendes\ Wasser} = V_{Halbkugel} - V_{Kugelabschnitt};$

$r = 10$ cm; $\sin 20° = \frac{x}{r} \Rightarrow x = 3{,}42$ cm; $h = r - x = 6{,}58$ cm;

a) $V_{Kugelabschnitt} = \frac{\pi \cdot h^2}{3} \cdot (3r - h) = 1061{,}8\ \text{cm}^3;$

$V_{Halbkugel} = \frac{2\pi}{3} \cdot r^3 = 2094{,}4\ \text{cm}^3;$

$V_{ausfließendes\ Wasser} = 1032{,}6\ \text{cm}^3 \approx 1{,}03\ \text{dm}^3 = 1{,}03$ Liter

b) Es ist nun zuerst jener Radius r der Halbkugel gefragt, so dass bei ihrer Neigung um 20° 6 Liter Wasser ausfließen.

$\frac{2\pi}{3} \cdot r^3 - \frac{\pi \cdot h^2}{3} \cdot (3r - h) = 3\ \text{dm}^3$ mit $h = r - r \cdot \sin 20° = r \cdot (1 - \sin 20°) = 0{,}6580 \cdot r;$

$2r^3 - (0{,}6580 \cdot r)^2 \cdot r \cdot (3 - 0{,}6580) = \frac{9}{\pi}$

$0{,}9861 \cdot r^3 = \frac{9}{\pi} \Rightarrow r = 1{,}427$ dm; $V_{Halbkugel} = \frac{2\pi}{3} \cdot r^3 = 6{,}0849\ \text{dm}^3 \approx 6{,}08$ Liter